Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Čtvercová tabulka je rozdělena na* 16×16 *políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka skočí.)*

Řešení. V průběhu své cesty se kobylka musí posunout o celkem 15 políček doprava a 15 políček dolů. Dohromady se tak posune o 30 políček, takže dvojici skoků délky $2 + 3 = 5$ zopakuje celkem šestkrát. Přesněji vyjádřeno, její jednotlivé skoky budou mít délky postupně

$$2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

takže půjde šestkrát o skok délky dva (*2-skok*) a šestkrát o skok délky tři (*3-skok*). Jestliže jednotlivým 2-skokům a 3-skokům připíšeme pořadová čísla podle jejich pozice v (1), bude kobylčina cesta jednoznačně určena výběrem pořadových čísel skoků směřujících doprava (zbývající pak budou směřovat dolů). Musíme přitom dbát jen na to, aby součet délek takto vybraných skoků (tj. skoků doprava) byl roven 15. Toho lze povolenými délkami dosáhnout (bez rozlišení pořadí skoků) následujícími způsoby:

$$\begin{aligned} 15 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3, \\ 15 &= 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2, \\ 15 &= 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2. \end{aligned}$$

V prvním případě bude pět ze šesti 3-skoků doprava (a všechny 2-skoky dolů), takže cesta bude určena pouze pořadovým číslem toho (jediného) 3-skoku, který bude směřovat dolů. Proto je cest tohoto typu právě 6.

Ve druhém případě bude cesta určena pořadovými čísly tří 3-skoků doprava a pořadovými čísly tří 2-skoků doprava. Výběry obou trojic jsou nezávislé (tj. lze je spolu libovolně kombinovat) a při každém z nich vybíráme tři prvky ze šesti, což lze udělat 20 způsoby.[1] Proto je cest tohoto typu $20 \cdot 20 = 400$.

Ve třetím případě je kobylčina cesta určena pouze pořadovým číslem toho jediného 3-skoku, který bude směřovat doprava, takže cest tohoto typu je (stejně jako v prvním případě) opět 6.

Odpověď: Hledaný celkový počet kobylčiných cest je $6 + 400 + 6 = 412$.

Jiné řešení. Zadanou úlohu „pro pravé dolní políčko“ vyřešíme tak, že budeme postupně určovat počty kobylčiných cest, které vedou do jednotlivých políček tabulky (políčka budeme postupně volit od levého horního políčka po jednotlivých vedlejších diagonálách, neboť jak snadno zjistíme, po určitém počtu skoků skončí kobylka na téže vedlejší diagonále; tak se nakonec dostaneme k tomu nejvzdálenějšímu, totiž pravému

[1] Řešitelé kategorie C ještě patrně neznají kombinační čísla, doporučíme jim proto, aby počet $6 \cdot 5 \cdot 4$ všech uspořádaných trojic (ze 6 prvků) vydělili počtem 6 všech pořadí jedné trojice prvků.

dolnímu políčku). Pro další výklad označme jako (i,j) políčko v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Je zřejmé, že povoleným způsobem skákání se kobylka dostane jen na některá políčka celé tabulky. Po prvním skoku (který musí být 2-skok z políčka $(1,1)$) se kobylka dostane jen na políčko $(1,3)$ nebo $(3,1)$, po druhém skoku (tedy 3-skoku) to bude některé z políček

$$(1,6),\ (3,4),\ (4,3),\ (6,1).$$

Ve všech dosud zmíněných políčkách je na obrázku vepsáno číslo 1, neboť do každého z nich vede jediná kobylčina cesta. Situace se změní po třetím skoku (2-skoku) kobylky, neboť do políček $(3,6)$ a $(6,3)$ vedou vždy dvě cesty, a to z políček $(1,6)$ a $(3,4)$, resp. políček $(6,1)$ a $(4,3)$. Takto v dalším kroku naší úvahy určíme všechna políčka, na která se kobylka může dostat po čtyřech skocích, i počty cest, které v těchto políčkách končí. V zaplňování tabulky těmito čísly (postupem podle počtu skoků kobylky) pokračujeme, až se dostaneme do „cílového“ políčka $(16,16)$. Přitom neustále využíváme toho, že poslední skok kobylky na dané políčko má danou délku a jeden či oba možné směry. V prvním případě číslo z předposledního políčka na cestě na poslední políčko opíšeme, ve druhém případě tam napíšeme součet čísel z obou možných předposledních políček.

1		1			1		1			1		1			1
1			1		2			2		3			3		4
		1		1			2		2			3		3	
			1			1		3			3		6		
1		2			4		6			9		12			16
				1		2			4		7			10	
1			2		6			9		18			24		40
		2		3			9		13			25		35	
			2			4		13			20		44		
1		3			9		18			36		61			101
				3		7			20		40			75	
1			3		12			25		61			105		206
		3		6			24		44			105		180	
			3			10		35			75		180		
1		4			16		40			101		206			412

Stejně jako v prvním řešení docházíme k výsledku 412.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kobylka skáče po úsečce délky 10 cm a to skoky o 1 cm nebo o 2 cm (vždy stejným směrem). Kolika způsoby se může dostat z jednoho krajního bodu úsečky do druhého? [Pokud označíme a_n počet způsobů, kolika se může kobylka dostat do bodu vzdáleného n cm od počátečního bodu úsečky, pak pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Protože $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$, můžeme další počty $a_3, a_4, \ldots$ postupně počítat podle vzorce z předchozí věty, až dospějeme k hodnotě $a_{10} = 89$. Při jiném postupu je možno rozdělit všechny cesty podle toho, kolik při nich udělá kobylka skoků délky dva (jejich počet může být 0, 1, 2, 3, 4 nebo 5 a tím je také určen počet skoků délky 1: 10, 8, 6, 4, 2

nebo 0). Ke každému takovému počtu pak určíme počet všech různých pořadí jedniček a dvojek (dávajících v součtu 10). Dostaneme tak $1+9+28+35+15+1 = 89$ možných cest.]

2. Skřítek se pohybuje v tabulce 10×15 skoky o jedno políčko nahoru nebo o jedno políčko doprava. Kolika různými cestami se může dostat z levého dolního do pravého horního políčka? [Skřítek udělá 9 skoků nahoru a 14 skoků doprava. Jeho cestu určíme, když v pořadí všech 23 skoků vybereme těch devět, které povedou nahoru. Počet těchto výběrů 9 prvků z daných 23 je roven zlomku $\dfrac{23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 16 \cdot 15}{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$, tedy číslu 817 190.]
3. Určete počet dvojic (a, b) celých kladných čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. [C–51–II–1]
4. Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky. [C–56–S–1]

2. *Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí*

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$?

Řešení. Nejprve ukážeme, že první dvě rovnosti ze zadání úlohy jsou splněny jenom tehdy, když platí $a = c$ a zároveň $b = d$. Skutečně, díky tomu, že zadaná čísla jsou kladná (a tedy různá od nuly), můžeme zmíněné rovnosti zapsat jako

$$a\Big(1 + \frac{b}{a}\Big) = c\Big(1 + \frac{d}{c}\Big) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podle druhé rovnosti vidíme, že součty v obou závorkách z první rovnosti mají stejnou kladnou hodnotu, takže se musí rovnat první činitelé obou jejích stran. Platí tedy $a = c$, odkud už plyne i rovnost $b = d$.

Když už víme, že platí $a = c$ a $b = d$, vystačíme dále pouze s proměnnými a a b a najdeme největší hodnotu zadaného součtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jediné podmínky, totiž že kladná čísla a, b splňují rovnost $a^2 + b^2 = 1$, která je vyjádřením třetí zadané rovnosti $ac + bd = 1$ (první dvě jsou díky rovnostem $a = c$ a $b = d$ zřejmé).

Všimněme si, že pro druhou mocninu (kladného) součtu S platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota S bude největší, právě když bude největší hodnota $2ab$. Ze zřejmé nerovnosti $(a - b)^2 \geqq 0$ po roznásobení ovšem dostaneme

$$2ab \leqq a^2 + b^2 = 1,$$

přitom rovnost $2ab = 1$ nastane, právě když bude platit $a = b$, což pro kladná čísla a, b spolu s podmínkou $a^2 + b^2 = 1$ vede k jediné vyhovující dvojici $a = b = 1/\sqrt{2}$. Největší hodnota výrazu $2ab$ je tedy 1, takže největší hodnota výrazu S^2 je $4(1+1) = 8$, a tudíž největší hodnota S je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dosáhne se pro jedinou přípustnou čtveřici $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že nerovnost $\frac{1}{2}(u+v) \geqq \sqrt{uv}$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou libovolných nezáporných čísel u a v plyne ze zřejmé nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$ vhodnou volbou hodnot a a b. [Zvolte $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$.] Podobným obratem nebo přímým užitím zmíněné AG-nerovnosti (v některých případech i několikerým) dokažte další nerovnosti
$$2abc \leqq a^2 + b^2c^2, \quad a^4 + b^4 \geqq a^3b + ab^3, \quad (1 + a + b)^2 \geqq 3(a + b + ab),$$
$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geqq \frac{8}{(a+b)(c+d)}, \quad \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq 8,$$
v nichž a, b, c, d označují libovolná kladná čísla.
2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí
$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$
a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59–C–I–5]
3. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí
$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$
[58–C–I–6]
4. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí
$$(a + bc)(b + ac) \geqq ab(c + 1)^2.$$
Zjistěte, kdy nastane rovnost. [58–C–S–1]
5. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti
$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$
platí nerovnost
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$
Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. [55–C–II–2]
6. Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost
$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0.$$
[54–C–I–1]

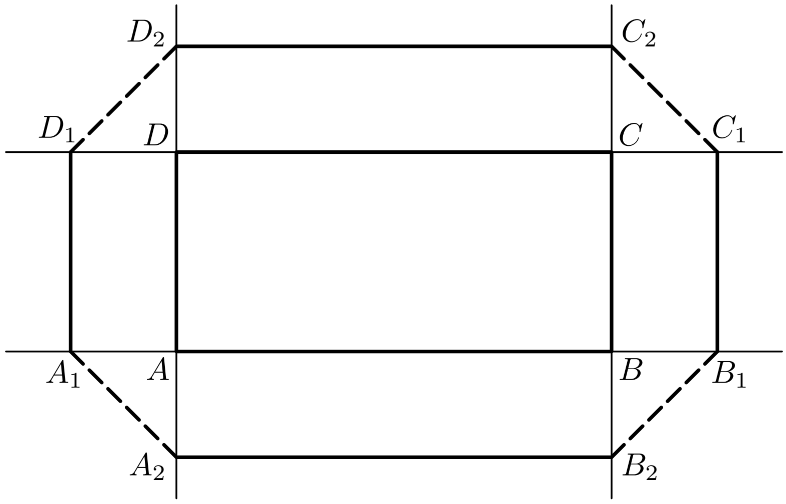
3. *Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$.*

Řešení. Požadovanou hodnotu součtu čtyř vzdáleností zapíšeme ve tvaru
$$\frac{2}{3}o = \frac{1}{6}o + \frac{1}{2}o = \frac{1}{6}o + |AB| + |BC|. \tag{1}$$

Pro libovolný bod v pásu určeném přímkami AB a CD platí, že součet jeho vzdáleností od těchto dvou rovnoběžek je roven jejich vzdálenosti, tj. $|BC|$. Pro libovolný bod vně tohoto pásu je součet dvou uvažovaných vzdáleností roven součtu hodnoty $|BC|$ a dvojnásobku vzdálenosti od bližší z obou rovnoběžek. Podobná dvě tvrzení platí pro součet vzdáleností libovolného bodu od rovnoběžek BC a AD ve vztahu k jejich vzdálenosti $|AB|$. S ohledem na vyjádření (1) tak můžeme učinit první dva závěry.

(1) V pásu mezi přímkami AB a CD jsou hledanými body právě ty, jejichž součet vzdáleností od přímek BC a AD je roven $\frac{1}{6}o + |AB|$. Jsou to tedy body, které leží

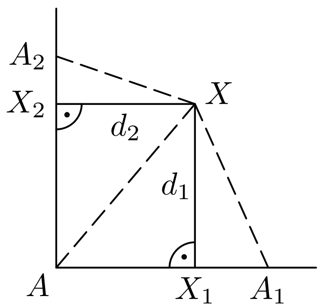
vně pásu určeného přímkami BC a AD a mají od bližší z nich vzdálenost rovnu $\frac{1}{6}o : 2 = \frac{1}{12}o$. Množinu hledaných bodů v pásu mezi AB a CD tak tvoří dvě úsečky B_1C_1 a A_1D_1 znázorněné na obr. 1. Jejich krajní body A_1, B_1 leží na přímce AB vně úsečky AB tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{12}o$; krajní body C_1, D_1 leží na přímce CD vně úsečky CD tak, že $|CC_1| = |DD_1| = \frac{1}{12}o$.



Obr. 1

(2) V pásu mezi přímkami BC a AD jsou hledanými body právě ty, jejichž součet vzdáleností od přímek AB a CD je roven $\frac{1}{6}o + |BC|$. Jsou to tedy body, které leží vně pásu určeného přímkami AB a CD a které mají od bližší z nich vzdálenost $\frac{1}{12}o$. Množinu hledaných bodů v pásu mezi BC a AD tak tvoří dvě úsečky A_2B_2 a C_2D_2, přitom krajní body B_2, C_2 leží na přímce BC vně úsečky BC tak, že $|BB_2| = |CC_2| = \frac{1}{12}o$ a krajní body A_2, D_2 leží na přímce AD vně úsečky AD tak, že $|AA_2| = |DD_2| = \frac{1}{12}o$.

Zbývá najít hledané body mimo sjednocení obou uvažovaných pásů, tedy body ležící v některém ze čtyř pravých úhlů A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2 či D_1DD_2. Z výše provedených úvah vyplývá, že v každém z těchto úhlů hledáme právě ty body, jejichž součet vzdáleností od obou ramen úhlu je roven hodnotě $\frac{1}{12}o$. S ohledem na symetrii ukážeme pouze, že takové body úhlu A_1AA_2 vyplní úsečku A_1A_2; v ostatních třech úhlech to pak budou úsečky B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 (obr. 1).



Obr. 2

Všimněme si nejprve, že body A_1, A_2 jsou jediné body na ramenech úhlu A_1AA_2, které mají požadovanou vlastnost. Pro libovolný vnitřní bod X úhlu A_1AA_2 označme jako d_1, d_2 vzdálenosti bodu X od ramen AA_1, resp. AA_2. Hledáme pak právě ty body X, pro něž platí $d_1 + d_2 = \frac{1}{12}o$ (obr. 2). Tuto „rovnici“ nyní vyřešíme úvahou o obsahu S útvaru AA_1XA_2, který je buď trojúhelník, nebo konvexní či nekonvexní čtyřúhelník.

Obsah S je vždy roven součtu obsahů dvou trojúhelníků AA_1X a AA_2X:

$$S = S_{AA_1X} + S_{AA_2X} = \frac{1}{2}|AA_1|d_1 + \frac{1}{2}|AA_2|d_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}o \cdot (d_1 + d_2).$$

Rovnice $d_1 + d_2 = \frac{1}{12}o$ je tak splněna, právě když obsah S má stejnou hodnotu jako obsah S_0 pravoúhlého trojúhelníku AA_1A_2, jehož obě odvěsny mají shodnou délku $\frac{1}{12}o$.

Hledané body X jsou tudíž právě ty, pro něž je útvar AA_1XA_2 trojúhelník; je-li totiž AA_1XA_2 konvexní, resp. nekonvexní čtyřúhelník, platí zřejmě $S > S_0$, resp. $S < S_0$. Hledané body X úhlu AA_1A_2 proto skutečně tvoří úsečku A_1A_2.

Odpověď: Hledaná množina je sjednocením osmi úseček, jež tvoří hranici osmiúhelníku $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

Poznámka. Z obr. 2 je také patrné, že rovnice $d_1 + d_2 = c$, kde $c = |AA_1| = |AA_2|$, bude splněna, právě když bude $|X_1A_1| = d_1$ a $|X_2A_2| = d_2$, tj. právě když budou oba trojúhelníky XX_1A_1 a XX_2A_2 rovnoramenné. To zřejmě nastane, právě když bude úhel A_1XA_2 přímý, protože $|\sphericalangle AA_1A_2| = 45°$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V rovině je dáno k navzájem různých rovnoběžek. Které body této roviny mají nejmenší součet vzdáleností od zmíněných k rovnoběžek? Odpověď promyslete nejdříve pro malé hodnoty $k = 2, 3, 4, \dots$ a pak podejte zobecnění. [V případě sudého k jde o body pásu mezi dvěma „prostředními“ rovnoběžkami, v případě lichého k jde o body na prostřední rovnoběžce.]
2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AC, BC délky 1 cm. V pravém úhlu ACB určete všechny ty body, jejichž součet vzdáleností od ramen CA, CB je roven a) 1 cm, b) 3 cm. [V případě a) pro hledaný bod X porovnejte obsah útvaru vzniklého slepením trojúhelníků ACX a BCX s obsahem trojúhelníku ABC a vyvoďte odtud, že vyhovující body X vyplní úsečku AB. V případě b) zaměňte body A, B vhodnými body A', B' na ramenech CA, resp. CB a užijte stejný postup jako v případě a).]
3. V rovině jsou dány dvě rovnoběžky a a b vzdálené 1 cm a přímka c k nim kolmá. Určete všechny body roviny, jejichž součet vzdáleností od přímek a, b, c je roven 2 cm. [Rozlište případy, kdy takový bod leží v pásu určeném přímkami a, b a kdy leží v jednom ze čtyř pravých úhlů tvořených přímkou c a jednou z přímek a či b.]
4. Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal 1/8 obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. Kolik má úloha řešení pro dané umístění úsečky AB v rovině? [C–54–S–3]

4. *Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného devatenáctiúhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku.*

ŘEŠENÍ. Označme S střed daného pravidelného 19-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{19}$. Osa každé úsečky A_iA_j je přímka, která kromě bodu S prochází ještě jistým vrcholem A_k (díky tomu, že číslo 19 je liché). Proto lze všechny úsečky A_iA_j rozdělit do 19 skupin navzájem rovnoběžných úseček se společnou osou, kterou je vždy jedna z přímek SA_k. V každé skupině je přitom zřejmě $(19 - 1) : 2 = 9$ úseček a každé dvě z nich jsou základnami lichoběžníku (nemůže jít o rovnoběžník, neboť žádná z úseček A_iA_j neprochází středem S, opět díky tomu, že číslo 19 je liché).

Počet všech úseček A_iA_j s krajními body v libovolně vybrané sedmiprvkové množině vrcholů je $(7 \cdot 6) : 2 = 21 > 19$, takže dvě z těchto úseček leží ve stejné z 19 popsaných skupin. Tím je existence kýženého lichoběžníku dokázána, ať je sedmiprvková množina vrcholů zvolena jakkoliv.

Poznámka. Vstupní úvahu o ose úsečky A_iA_j lze vynechat. Místo toho lze rovnou popsat oněch 19 devítiprvkových skupin navzájem rovnoběžných úseček a pak konstatovat, že jde o všechny možné úsečky A_iA_j, neboť těch je $(19 \cdot 18) : 2 = 19 \cdot 9$, tedy právě tolik co úseček v popsaných 19 skupinách.

JINÉ ŘEŠENÍ. Zatímco v původním řešení jsme uvažovali o základnách hledaného lichoběžníku, nyní se zaměříme na jeho ramena či úhlopříčky. V obou případech musí jít o dvě shodné úsečky, neboť každý lichoběžník, kterému lze opsat kružnici, je rovnoramenný. Osy jeho základen totiž musejí procházet středem opsané kružnice, takže splývají a tvoří tak osu souměrnosti celého lichoběžníku. Naopak každé dvě tětivy téže kružnice, které mají stejnou délku kratší než průměr kružnice, nejsou rovnoběžné a nemají společný krajní bod, tvoří buď ramena, nebo úhlopříčky (rovnoramenného) lichoběžníku (stačí si uvědomit, že libovolné dvě shodné tětivy téže kružnice jsou souměrně sdružené podle přímky procházející středem zmíněné kružnice a průsečíkem odpovídajících sečen).

V pravidelném 19-úhelníku $A_1A_2\dots A_{19}$ mají zřejmě všechny úsečky A_iA_j dohromady pouze 9 různých délek. Ve vybrané sedmiprvkové množině vrcholů má oba krajní body celkem $(7\cdot 6):2 = 21$ úseček. Protože $21 > 2\cdot 9$, podle Dirichletova principu některé tři z těchto úseček mají stejnou délku (tj. jsou shodné). Kdyby každé dvě z těchto tří úseček měly společný vrchol (a víme, že z libovolného vrcholu vycházejí nejvýše dvě shodné strany či úhlopříčky), vytvořily by tyto tři úsečky rovnostranný trojúhelník, což není možné, neboť $3 \nmid 19$. Proto některé dvě z těchto tří shodných úseček nemají společný krajní bod, takže to jsou buď ramena, nebo úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku (protější strany rovnoběžníku to být nemohou).

Návodné a doplňující úlohy:

Užitečný *Dirichletův (přihrádkový) princip* se nejčastěji uvádí s dvěma přirozenými čísly k a n takto: „Je-li alespoň $nk+1$ předmětů rozděleno do n přihrádek, je v některé z nich alespoň $k+1$ z těchto předmětů.“ I když jde o velice jednoduché tvrzení (zdůvodněte ho sami), nachází účelné uplatnění v mnoha situacích (často dokonce s hodnotou $k = 1$).

1. Z libovolných 82 přirozených čísel lze vybrat dvě čísla tak, aby jejich rozdíl byl dělitelný číslem 81. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 81.]
2. Vybereme-li z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ libovolně 12 různých čísel, pak rozdíl některých dvou z nich bude dvojmístné číslo zapsané dvěma stejnými číslicemi. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 11.]
3. Dokažte, že ze 111 různých celých čísel se vždy dá vybrat jedenáct takových, že jejich součet je dělitelný jedenácti. [Využijte toho, že součet 11 čísel se stejným zbytkem při dělení číslem 11 je násobkem čísla 11.]
4. Žádné z daných 17 celých čísel není dělitelné číslem 17. Dokažte, že součet několika z těchto daných čísel je násobkem čísla 17. [Daná čísla označte jako $a_1, \dots, a_{17}$ a uvažte zbytky 17 součtů $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ $(i = 1, 2, \dots, 17)$ při dělení číslem 17; není-li žádný z nich roven 0, dávají dva ze součtů $s_i < s_j$ stejný zbytek modulo 17, takže je číslem 17 dělitelný rozdíl $s_j - s_i$ pro některá $i < j$.]
5. Tabulka 6×6 je zaplněna čísly $-1, 0, 1$. Sečteme čísla v jednotlivých řádcích, sloupcích i obou úhlopříčkách. Dostaneme $6 + 6 + 2 = 14$ součtů. Dokažte, že některé dva z nich se sobě rovnají. [Všechny součty leží v množině celých čísel z intervalu $\langle -6, +6\rangle$, která má jen 13 prvků.]
6. Jaký největší počet králů můžeme umístit na šachovnici 8×8, aby se žádní dva navzájem neohrožovali? [16. Rozdělte celou šachovnici na 16 dílů 2×2.]
7. Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně 10 bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše $a/3$. Dokažte. [Celý trojúhelník rozdělte na 9 rovnostranných trojúhelníků o straně $a/3$.]
8. Deset rodin z jednoho domu trávilo dovolenou v zahraničí. Každá jela jinam a poslala domů pohlednice pěti z ostatních rodin. Dokažte, že některé dvě rodiny si poslaly pohlednice navzájem. [Všech pohlednic bylo 50, různých dvojprvkových množin $\{\text{odesílatel}, \text{adresát}\}$ je nejvýše $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.]
9. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) [58–C–I–5]

5. *Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.*

Řešení. Ukážeme, že jedinými celými čísly, která vyhovují úloze, jsou $n = 0$ a $n = 1$.

Upravme nejprve výraz $V = 2n^3 - 3n^2 + n + 3$ následujícím způsobem:

$$V = (n^3 - 3n^2 + 2n) + (n^3 - n) + 3 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) + 3.$$

Oba součiny $(n-2)(n-1)n$ a $(n-1)n(n+1)$ v upraveném výrazu V jsou dělitelné třemi pro každé celé číslo n (v obou případech se jedná o součin tří po sobě jdoucích celých čísel), takže výraz V je pro všechna celá čísla n dělitelný třemi. Hodnota výrazu V je tak prvočíslem, právě když $V = 3$, tedy právě když součet obou zmíněných součinů je roven nule:

$$0 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) = n(n-1)[(n-2)+(n+1)] = n(n-1)(2n-1)$$

Poslední podmínku však splňují pouze dvě celá čísla n, a to $n = 0$ a $n = 1$. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Fakt, že výraz V je dělitelný třemi pro libovolné celé n, můžeme odvodit také tak, že do něj postupně dosadíme $n = 3k$, $n = 3k+1$ a $n = 3k+2$, kde k je celé číslo, rozdělíme tedy všechna celá čísla n do tří skupin podle toho, jaký dávají zbytek při dělení třemi.

Návodné a doplňující úlohy:

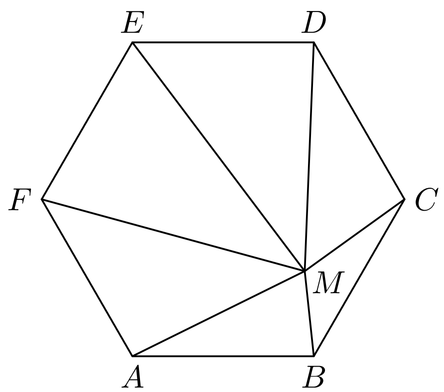
1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.
2. Určete všechna kladná celá čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. [C–55–I–1]
3. Pro která dvojmístná čísla n je číslo $n^3 - n$ dělitelné stem? [C–50–S–3]
4. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti. [C–59–II–1]

6. *Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem $30\,cm^2$ je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě $3\,cm^2$ a $2\,cm^2$. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM.*

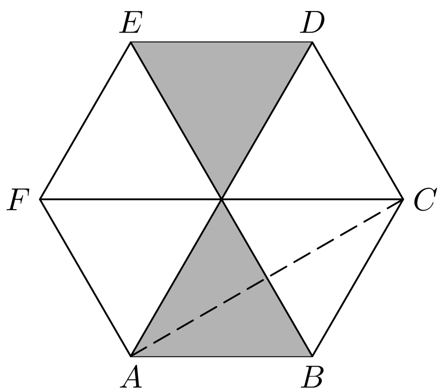
Řešení. Úloha pojednává o obsahu šesti trojúhelníků, na které je daný pravidelný šestiúhelník rozdělen spojnicemi jeho vrcholů s bodem M (obr. 3). Celý šestiúhelník o daném obsahu, který označíme jako S, lze rovněž rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků o obsahu $S/6$ (obr. 4). Označíme-li r jejich stranu, v vzdálenost rovnoběžek AB, DE a v_1 vzdálenost bodu M od přímky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

neboť $S/3$ je součet obsahů dvou vybarvených rovnostranných trojúhelníků. Díky symetrii mají stejnou hodnotu $S/3$ i součty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtud již dostáváme první dva neznámé obsahy $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 3



Obr. 4

Jak určit zbývající dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM}, když prozatím známe pouze jejich součet $S/3$? Všimněme si, že součet zadaných obsahů trojúhelníků ABM a BCM má významnou hodnotu $S/6$, která je i obsahem trojúhelníku ABC (poslední plyne opět z obr. 4). Taková shoda obsahů znamená právě to, že bod M leží na úhlopříčce AC. Trojúhelníky ABM a BCM tak mají shodné výšky ze společného vrcholu B a totéž platí i pro výšky trojúhelníků CDM a FAM z vrcholů F a D (bodů, jež mají od přímky AC stejnou vzdálenost). Pro poměry obsahů těchto dvojic trojúhelníků tak dostáváme

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V součtu $S_{CDM} + S_{FAM}$ o hodnotě $S/3$ jsou tedy sčítanci v poměru $2:3$. Platí proto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [57–C–S–2]
2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [55–C–I–5]
3. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]