62. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. V obdélníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ leží vzájemně se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD, k_2 se dotýká stran AB a BC.

a) Dokažte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určete nejmenší a největší možnou hodnotu obsahu trojúhelníku AS_1S_2.

2. Na každé z $n+1$ stěn n-bokého jehlanu je napsáno číslo 0. V každém kroku zvolíme některý vrchol a čísla na všech stěnách obsahujících tento vrchol zvětšíme o 1 nebo je všechna zmenšíme o 1. Dokažte, že nemůže nastat situace, v níž by na všech stěnách jehlanu bylo napsáno číslo 1.

3. Určete všechny trojice reálných čísel a, b, c, které splňují podmínky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 11. prosince 2012

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

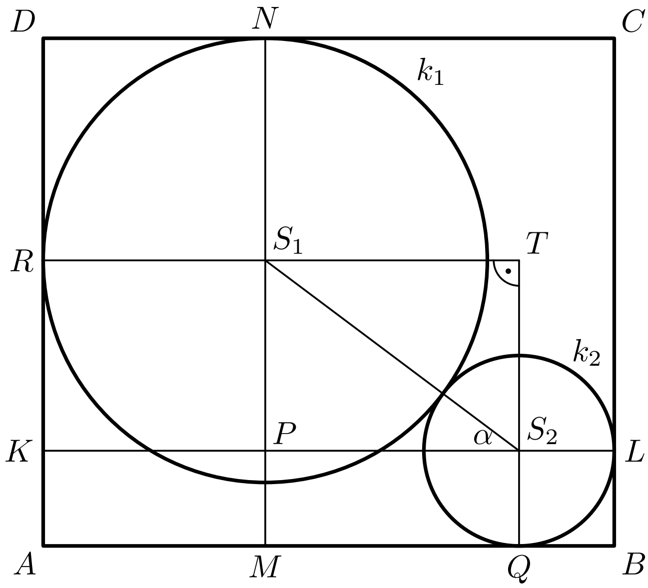
1. a) Bodem S_1 veďme rovnoběžku se stranou AD a její průsečíky se stranami AB a CD označme M a N. Podobně vedeme bodem S_2 rovnoběžku s AB a její průsečíky se stranami AD a BC označíme K a L; průsečík přímek KL a MN označme P (obr. 1). Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník S_1PS_2 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (8 - r_1 - r_2)^2 + (9 - r_1 - r_2)^2 \tag{1}$$

a odtud

$$(r_1 + r_2)^2 - 34(r_1 + r_2) + 145 = 0,$$
$$(r_1 + r_2 - 5)(r_1 + r_2 - 29) = 0.$$

Protože $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ (průměr kružnic, které podle zadání leží celé v daném obdélníku, nemůže být větší než délka strany AD), musí platit $r_1 + r_2 = 5$.



Obr. 1

b) Označme Q patu kolmice z bodu S_2 na stranu AB, R patu kolmice z bodu S_1 na stranu AD a T průsečík přímek QS_2 a RS_1 (obr. 1). Obsah S trojúhelníku AS_2S_1 vypočítáme tak, že od obsahu pravoúhelníku $AQTR$ odečteme součet obsahů pravoúhlých trojúhelníků AQS_2, AS_1R a S_1S_2T:

$$S = (9 - r_2)(8 - r_1) - \frac{1}{2}r_2(9 - r_2) - \frac{1}{2}r_1(8 - r_1) - \frac{1}{2}(9 - r_1 - r_2)(8 - r_1 - r_2) =$$
$$= 72 - 9r_1 - 8r_2 + r_1r_2 - \frac{9}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_2^2 - 4r_1 + \frac{1}{2}r_1^2 - 36 + \frac{17}{2}(r_1 + r_2) - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 =$$
$$= 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4r_2 = 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4(5 - r_1) = 16 - \frac{1}{2}r_1,$$

kam jsme při poslední úpravě dosadili za r_2 z rovnosti $r_1 + r_2 = 5$. Z ní a z nerovností $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ dále vyplývá, že oba poloměry r_1, r_2 leží v intervalu $\langle 1, 4\rangle$, a proto

$$S = 16 - \frac{1}{2}r_1 \in \left\langle 14, \frac{31}{2} \right\rangle;$$

obsah má nejmenší hodnotu 14, je-li $r_1 = 4$ a $r_2 = 1$, a největší hodnotu $\frac{31}{2}$, jestliže $r_1 = 1$ a $r_2 = 4$.

Jiné řešení. a) Označme α úhel PS_2S_1 (obr. 1). Z rovnosti $|AB| = |KP| + |PS_2| + |S_2L|$ plyne $r_1 + (r_1 + r_2)\cos\alpha + r_2 = 9$ čili

$$(1 + \cos\alpha)(r_1 + r_2) = 9. \tag{2}$$

Podobně z rovnosti $|AD| = |MP| + |PS_1| + |S_1N|$ vyplývá

$$(1 + \sin\alpha)(r_1 + r_2) = 8. \tag{3}$$

Z posledních dvou rovnic vychází

$$\begin{gathered} 8(1 + \cos\alpha) = 9(1 + \sin\alpha), \\ 8\cos\alpha = 1 + 9\sin\alpha. \end{gathered}$$

Umocněním této rovnice a využitím identity $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ dostáváme kvadratickou rovnici pro $\sin\alpha$,

$$\begin{gathered} 64(1 - \sin^2\alpha) = 1 + 18\sin\alpha + 81\sin^2\alpha, \\ 145\sin^2\alpha + 18\sin\alpha - 63 = 0. \end{gathered}$$

Ta má diskriminant $D = 18^2 + 4 \cdot 63 \cdot 145 = 9(36 + 28 \cdot 145) = 3^2 \cdot 2^{12}$ a dva reálné kořeny $-\frac{21}{29}$ a $\frac{3}{5}$. Protože α je vnitřní úhel trojúhelníku, dostáváme

$$\sin\alpha = \frac{3}{5},$$

a tudíž

$$r_1 + r_2 = \frac{8}{1 + \sin\alpha} = 5.$$

b) Obsah S trojúhelníku AS_2S_1 lze vypočítat pomocí vektorového součinu vektorů $S_2 - A$ a $S_1 - A$. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby platilo $A = [0, 0, 0]$, $B = [9, 0, 0]$, $D = [0, 8, 0]$. Potom $S_2 = [9 - r_2, r_2, 0]$, $S_1 = [r_1, 8 - r_1, 0]$ a zkoumaný obsah S je

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|(S_2 - A) \times (S_1 - A)| = \frac{1}{2}[(9 - r_2)(8 - r_1) - r_1r_2] = \frac{1}{2}(72 - 9r_1 - 8r_2) = \\ &= 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4r_2. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výraz jako v prvním řešení, a tak týmž postupem zjistíme, že zkoumaný obsah má nejmenší hodnotu 14 a největší hodnotu $\frac{31}{2}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod udělte za rovnici (1) nebo za soustavu (2), (3), další bod za určení součtu $r_1 + r_2$, tedy za část a) nejvýše dva body. Dva body dejte za vhodné vyjádření obsahu trojúhelníku AS_2S_1 a zbývající dva body za určení nejmenší a největší hodnoty obsahu využitím nerovností $1 \leqq r_1 \leqq 4$ či $1 \leqq r_2 \leqq 4$.

2. Označme b součet čísel na bočních stěnách jehlanu, a číslo na jeho podstavě. Zvolíme-li některý z vrcholů podstavy, číslo b se zvětší o 2 nebo zmenší o 2 a číslo a se zvětší o 1 nebo zmenší o 1. Hodnota výrazu $V = b - 2a$ se tedy nezmění. Při volbě hlavního vrcholu se číslo a nezmění a číslo b se zvětší nebo zmenší o n, takže i hodnota výrazu V se zvětší nebo zmenší o n. Protože na začátku je $V = 0$, bude V po libovolném počtu kroků dělitelné číslem n. Kdyby byly na všech stěnách jedničky, měl by výraz V hodnotu $n - 2$, jež číslem n dělitelná není, protože $n \geqq 3$, a tedy $0 < n - 2 < n$.

Jiné řešení. Dejme tomu, že jsme volbou hlavního vrcholu čísla u-krát zvětšili a v-krát zmenšili. Podobně nechť se při volbě vrcholu A_i podstavy čísla w_i-krát zvětšila a z_i-krát zmenšila. Označme $y = u - v$, $x_i = w_i - z_i$. Kdyby nyní byly na všech stěnách jedničky, musely by být splněny rovnosti

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y &= 1, \\ x_2 + x_3 + y &= 1, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n + y &= 1, \\ x_n + x_1 + y &= 1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Sečtením prvních n rovností dostaneme $2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + ny = n$ a podle (4) máme

$$2 + ny = n.$$

Odtud vyplývá, že n je dělitelem čísla 2, to však pro žádné $n \geqq 3$ neplatí.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu dejte 1 bod za nápad uvažovat součet b a porovnání jeho změn se změnami čísla a v podstavě, další 3 body za následné sestavení vhodného výrazu V (hodí se např. i výraz $V = b + (n-2)a$). Pátý bod pak dejte za vysvětlení, že hodnota takového výrazu musí být stále dělitelná číslem n, šestý bod za důkaz, že tomu tak není, když jsou na všech stěnách jedničky. Při druhém postupu udělte 2 body za nápad uvažovat počty voleb jednotlivých vrcholů, další 1 bod za sestavení soustavy $n + 1$ rovnic pro potřebné změny stěnových čísel. Zbylými 1–3 body pak ohodnoťte úplnost zdůvodnění, že dotyčná soustava rovnic nemá celočíselné řešení.

3. Ukážeme, že úloze vyhovuje jediná trojice čísel: $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

Označme $s = b + c \geqq 7$. Dosazením $a = 5 - b$ a $c = s - b$ do první podmínky dostaneme

$$(5 - b)^2 + b^2 + (s - b)^2 = 26,$$

a tedy

$$3b^2 - 2(s + 5)b + s^2 - 1 = 0. \tag{5}$$

Tato kvadratická rovnice s parametrem s má v množině reálných čísel řešení, právě když její diskriminant splňuje nerovnost $4(s+5)^2 - 12(s^2 - 1) \geqq 0$. Úpravou dostaneme $s^2 - 5s - 14 \leqq 0$ neboli $(s + 2)(s - 7) \leqq 0$. Protože $s \geqq 7$, musí být $s = 7$. Po dosazení do (5) vyjde

$$3b^2 - 24b + 48 = 0;$$

tato rovnice má jediné řešení $b = 4$. Snadno potom dopočítáme $a = 1$ a $c = 3$.

Jiné řešení. Uhodneme-li vyhovující trojici $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$, pak její jedinečnost snadno zdůvodníme, když ukážeme, že hodnota nezáporného součtu

$$S = (a-1)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2$$

musí být pro každou vyhovující trojici rovna nule. Za podmínek ze zadání úlohy totiž platí

$$\begin{aligned} S &= (a^2+b^2+c^2) - 2(a+b) - 6(b+c) + (1^2+4^2+3^2) = \\ &= 26 - 2\cdot 5 - 6(b+c) + 26 = 42 - 6(b+c) \leqq 42 - 6\cdot 7 = 0, \end{aligned}$$

takže je skutečně $S = 0$, a tedy $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupném odvozování jako v prvním řešení udělte jeden bod za vyjádření $a = 5 - b$, $c = s - b$, kde $s \geqq 7$, druhý bod za rovnici $3b^2 - 2(s+5)b + s^2 - 1 = 0$, dva body za nerovnici $4(s+5)^2 - 12(s^2-1) \geqq 0$ a jeden bod za její vyřešení. Šestý bod potom za dopočítání b, a, c. Za pouhé uhodnutí vyhovující trojice dejte 1 bod.