62. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Dokažte, že žádná z rovnic

$$3^{2x} + 6^y = 2\,013, \quad |3^{2x} - 6^y| = 2\,013$$

nemá v oboru celých kladných čísel řešení.

2. Do políček čtvercové mřížky 11×11 jsme postupně zleva doprava a shora dolů zapsali čísla $1, 2, \ldots, 121$. Čtvercovou destičkou 3×3 jsme všemi možnými způsoby zakryli přesně devět políček. V kolika případech byl součet devíti zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla?

3. Uvažujme dvě kružnice se středy S_1 a S_2 takové, že jejich společné vnitřní tečny protínají jejich společné vnější tečny ve čtyřech bodech. Dokažte, že tyto čtyři průsečíky leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 24. ledna 2013

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

62. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Pro $y = 1$ dostaneme z první rovnice $3^{2x} = 2\,013 - 6 = 3^2 \cdot 223$, což je rovnice, která nemá v oboru kladných celých čísel řešení, neboť 223 není mocninou tří.

Navíc pro $y = 1$ platí $3^{2x} \geqq 9 > 6$ pro libovolné kladné celé číslo x, takže úpravou druhé rovnice dostáváme $3^{2x} = 2\,013+6 = 3\cdot 673$. Z podobného důvodu ani tato rovnice nemá řešení v oboru kladných celých čísel.

Dále předpokládejme, že $y \geqq 2$. Pro každé kladné celé číslo x je jak 3^{2x}, tak i 6^y dělitelné devíti. Výrazy na levých stranách obou rovnic jsou tedy dělitelné devíti, avšak 2 013 devíti dělitelné není. Proto ani v tomto případě nemá žádná z obou rovnic řešení v oboru kladných celých čísel.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za důkaz neexistence řešení u každé z rovnic 3 body. Při neúplném řešení ohodnoťte důkaz neexistence řešení pro $y \geqq 2$ v jedné rovnici 1 bodem, důkaz neexistence řešení pro $y = 1$ v jedné rovnici rovněž 1 bodem.

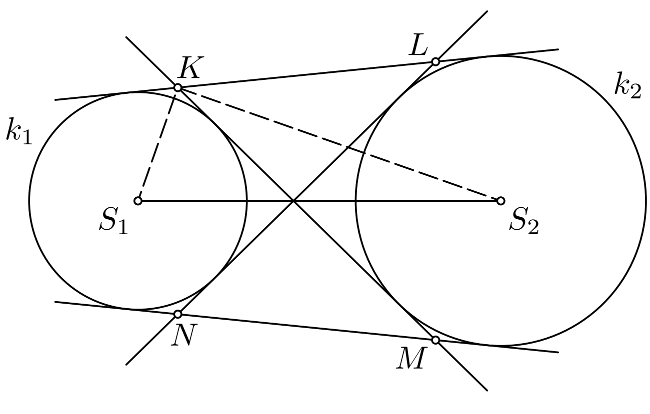
2. Označme n číslo pokryté středním políčkem čtvercové destičky. Potom první řádek této destičky pokrývá čísla $n - 12$, $n - 11$, $n - 10$, její druhý řádek pokrývá čísla $n - 1$, n a $n + 1$ a konečně třetí řádek pokrývá čísla $n + 10$, $n + 11$ a $n + 12$. Součet všech čísel pokrytých destičkou tak je $9n$.

Součet čísel pokrytých čtvercovou destičkou bude druhou mocninou celého čísla, právě když její střed pokryje číslo n, které je samo druhou mocninou celého čísla. Mezi čísly $1, 2, \ldots, 121$ mají tuto vlastnost pouze čísla z množiny $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$, z nich ale čísla 1, 4, 9, 100 a 121 leží v krajní řadě nebo krajním sloupci mřížky 11×11, a nemohou tak být pokryta středním polem čtvercové destičky 3×3.

Ze všech možných pokrytí mřížky má požadovanou vlastnost 6 pokrytí, kdy střed destičky pokrývá některé z čísel 16, 25, 36, 49, 64 a 81.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za vyjádření součtu čísel pod čtvercovou destičkou v závislosti na některém (pokrytém) políčku udělte nejvýše 2 body, za správnou diskusi, kdy je tento součet druhou mocninou celého čísla udělte nejvýše další 2 body. Za nalezení alespoň tří vyhovujících pokrytí mřížky udělte jeden bod, pokud řešitel špatně uvede některou polohu destičky, strhněte 1 bod, pokud špatně uvede alespoň tři polohy destičky, strhněte 2 body.

3. Označme k_1 kružnici se středem S_1 a k_2 kružnici se středem S_2. Průsečíky vnitřních a vnějších tečen označme K, L, M, N (obr. 1).



Obr. 1

Při uvedeném označení jsou přímky KL a KM tečnami jak kružnice k_1, tak kružnice k_2, takže polopřímky KS_1 a KS_2 jsou osami dvou vedlejších úhlů se společným ramenem KM. Velikost úhlu S_1KS_2 je tedy $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, a proto bod K leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2.

Podobným způsobem ukážeme, že na této kružnici leží i body L, M a N. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za konstatování, že KS_1 je osou úhlu s rameny na přímkách KL a KM, udělte 1 bod, za podobné zjištění pro KS_2 udělte 1 bod. Tyto body udělte i v případě, kdy místo bodu K bude uveden některý z bodů L, M, N. Pozor, toto bodovací schéma není aditivní, tj. v případě stejného pozorování pro více bodů K, L, M, N za ně udělte nejvýše 2 body. Za zjištění, že úhel S_1KS_2 (nebo jiný odpovídající úhel) je pravý, udělte 3 body. Za dokončení důkazu udělte 1 bod.