62. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Danému rovnostrannému trojúhelníku vepišme a opišme kružnice. Označme S obsah vzniklého mezikruží a T obsah kruhu, jehož průměr je shodný s délkou strany daného trojúhelníku. Který z obsahů S, T je větší? Svou odpověď zdůvodněte.

2. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro něž platí

$$a \cdot [a, b] = 4 \cdot (a, b),$$

kde symbol $[a, b]$ značí nejmenší společný násobek a (a, b) největší společný dělitel kladných celých čísel a, b.

3. Každý vrchol pravidelného devatenáctiúhelníku je obarven jednou ze šesti barev. Vysvětlete, proč stejnou barvu mají všechny vrcholy některého tupoúhlého trojúhelníku.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 24. ledna 2013

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

62. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Ukážeme, že se oba obsahy rovnají. Označme A, B, C vrcholy daného trojúhelníku a r a R odpovídající poloměry jeho vepsané a opsané kružnice; délku jeho strany označme a. Obě zmíněné kružnice mají společný střed S. Označme ještě P bod dotyku vepsané kružnice se stranou AB. Protože trojúhelník ABC je rovnostranný, je P zároveň středem strany AB. Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku PSB dostáváme

$$R^2 - r^2 = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$

což je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = T$.

Poznámka. Rovnostranný trojúhelník o straně a má výšku velikosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže zkoumané poloměry jsou $R = \frac{2}{3}v$ $(= \frac{1}{3}a\sqrt{3})$ a $r = \frac{1}{3}v$ $(= \frac{1}{6}a\sqrt{3})$, a proto

$$S = \pi\bigl(R^2 - r^2\bigr) = \pi\bigl(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\bigr)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\bigl(\tfrac{1}{2}a\bigr)^2 = T.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

2. Označíme-li d největšího společného dělitele čísel a a b, můžeme psát $a = kd$ a $b = ld$, kde $(k, l) = 1$, takže $[a, b] = kld$. Po dosazení do dané rovnice tak dostaneme

$$kd \cdot kld = 4 \cdot d \qquad \text{a po úpravě} \qquad k^2ld = 4.$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že může být jedině $k = 2$ nebo $k = 1$.

Pro $k = 2$ vychází $l = d = 1$, čemuž odpovídá dvojice $a = 2$, $b = 1$.

Pro $k = 1$ dostáváme rovnici $ld = 4$, která má v oboru kladných celých čísel tři řešení:

1. $l = 4$, $d = 1$ a řešením úlohy je dvojice $a = 1$, $b = 4$;
2. $l = 2$, $d = 2$ a řešením úlohy je dvojice $a = 2$, $b = 4$;
3. $l = 1$, $d = 4$ a řešením úlohy je dvojice $a = 4$, $b = 4$.

Závěr. Úloze vyhovují právě čtyři dvojice kladných celých čísel (a, b), a to $(2, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ a $(4, 4)$.

Jiné řešení. Využijeme známou rovnost $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, která platí pro všechna celá kladná a, b. Vynásobením obou stran dané rovnice číslem $[a, b]$ tak dostaneme

$$a[a, b]^2 = 4ab, \qquad \text{neboli} \qquad [a, b]^2 = 4b. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že $[a, b] \geqq b$, a tedy

$$4b = [a, b]^2 \geqq b^2,$$

je $b^2 \leqq 4b$, tudíž $b \leqq 4$. Navíc z upravené rovnice (1) plyne, že $4b$, a tedy i b je druhou mocninou celého čísla. Prozkoumáním obou případů $b \in \{1, 4\}$ (dosadíme do původní rovnice postupně všechny možné hodnoty (a, b), kterých je konečně mnoho, anebo dosadíme do (1) a využijeme toho, že a je dělitelem nejmenšího společného násobku $[a, b]$) dojdeme ke stejnému závěru jako v prvním řešení.

Jiné řešení. Protože zřejmě platí $[a, b] \geqq (a, b)$, plyne ze zadané rovnosti nerovnost $a \leqq 4$, přičemž rovnost $a = 4$ nastane, právě když $[a, b] = (a, b)$ neboli $a = b = 4$. To je první řešení dané úlohy, u všech ostatních musí být $a = 1$, $a = 2$, nebo $a = 3$. Pro $a = 1$ máme rovnici $1 \cdot b = 4$, takže $(a, b) = (1, 4)$ je druhým řešením. Pro $a = 2$ máme rovnici $2[2, b] = 4(2, b)$ neboli $[2, b] = 2(2, b)$, odkud podle možných hodnot $(2, b) = 1$ a $(2, b) = 2$ dostaneme $b = 1$, resp. $b = 4$; další dvě (třetí a čtvrté) řešení tedy jsou $(a, b) = (2, 1)$ a $(a, b) = (2, 4)$. Konečné pro $a = 3$ máme rovnici $3[3, b] = 4(3, b)$, z níž plyne $3 \mid (3, b)$, neboli $3 \mid b$, takže máme vlastně rovnici $3b = 12$, jejíž jediné řešení $b = 4$ ovšem podmínku $3 \mid b$ nesplňuje.

Poznámka. Diskusi o případu $a = 3$ se lze vyhnout následující úvahou. Přepišme zadanou rovnici do tvaru

$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = \frac{4}{a}.$$

Protože zlomek na levé straně je zřejmě celé číslo, musí být takový i zlomek na pravé straně, takže a je jedno z čísel 1, 2 nebo 4.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za smysluplnou manipulaci s největším společným dělitelem čísel a a b (jako např. dosazení do zadané rovnice) udělte 1 bod. Za „uhodnutí“ všech řešení udělte 1 bod. Pokud řešitel převede úlohu na rozebrání konečně mnoha případů (a je si toho vědom), udělte 4 body.

3. Protože $19 > 6 \cdot 3$, mají stejnou barvu některé čtyři vrcholy, které označíme A, B, C, D v pořadí na opsané kružnici. Ty tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku, jehož vnitřní úhly mají součet $360°$, takže nemohou být všechny menší než $90°$. Zároveň je zřejmé, že žádný z nich nemůže být roven $90°$, protože číslo 19 je liché. Aspoň jeden z úhlů ABC, BCD, CDA, DAB je tedy větší než $90°$, a proto je příslušný trojúhelník tupoúhlý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za konstatování, že některé čtyři vrcholy mají stejnou barvu.