**62. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie A

**1.** Je dáno 21 různých celých čísel takových, že součet libovolných jedenácti z nich je větší než součet deseti ostatních čísel.

a) Dokažte, že každé z daných čísel je větší než 100.

b) Určete všechny takové skupiny 21 různých celých čísel, jež obsahují číslo 101.

**2.** Nechť $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$ jsou množiny celých kladných čísel takové, že součet libovolných dvou různých čísel z $\mathsf{A}$ náleží $\mathsf{B}$ a podíl libovolných dvou různých čísel z $\mathsf{B}$ (větší ku menšímu) leží v $\mathsf{A}$. Určete největší možný počet prvků množiny $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

**3.** V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ s přeponou $AB$ a odvěsnami délek $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $k_1$ se dotýká stran $AB$ a $AC$ a $k_2$ se dotýká stran $AB$ a $BC$. Určete poloměry $r_1$ a $r_2$, jestliže platí $4r_1 = 9r_2$.

**4.** Dokažte, že kladná čísla $a$, $b$, $c$ jsou délkami stran trojúhelníku, právě když soustava rovnic

$$a(yz + x) = b(zx + y) = c(xy + z), \quad x + y + z = 1$$

s neznámými $x, y, z$ má řešení v oboru kladných reálných čísel.

Krajské kolo kategorie A se koná

**v úterý 15. ledna 2013**

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

## 62. ročník matematické olympiády

*Řešení úloh krajského kola kategorie A*

**1.** a) Označme daná čísla $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{21}$. Protože jsou to čísla celá, platí pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ nerovnost $a_{i+1} - a_i \geqq 1$, a proto $a_{i+10} - a_i \geqq 10$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$. Podmínka ze zadání je splněna, právě když součet nejmenších jedenácti čísel je větší než součet deseti největších, tedy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21}. \tag{1}$$

Odtud

$$a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11}) \geqq 10 \cdot 10 = 100;$$

protože nejmenší z daných čísel je větší než 100, jsou větší než 100 všechna daná čísla.

b) Dokázali jsme nerovnost $a_1 \geqq 101$. Všechna ostatní čísla jsou proto větší než 101. Obsahuje-li tedy skupina daných čísel číslo 101, musí platit $a_1 = 101$. Z ostré nerovnosti (1) pak vyplývá neostrá nerovnost

$$(a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11}) \leqq a_1 - 1 = 100,$$

a protože $a_{i+10} - a_i \geqq 10$, musí být splněna rovnost $a_{i+10} - a_i = 10$ pro každé $i \in \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. To nastane právě tehdy, jsou-li $a_2, a_3, \ldots, a_{21}$ po sobě jdoucí celá čísla.

Hledané skupiny tedy kromě čísla 101 obsahují ještě libovolných 20 po sobě jdoucích celých čísel větších než 101. Součet jedenácti nejmenších čísel z takové skupiny je o 1 větší než součet deseti největších.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, po 3 bodech za části a) i b). V části a) udělte 1 bod za vstupní úvahu, že stačí porovnávat součet 11 nejmenších čísel se součtem 10 největších, 1 bod za nerovnosti $a_{i+10} - a_i \geqq 10$, 1 bod pak za dokončení důkazu $a_1 > 100$.

V části b) dejte 2 body za důkaz rovností $a_{i+10} - a_i = 10$ a 1 bod za popis všech vyhovujících skupin čísel. (Nechybí-li v řešení a) vstupní úvaha, tolerujte v řešení b) absenci závěrečného konstatování, že nalezené skupiny mají skutečně požadovanou vlastnost.) Za pouhé uhodnutí konkrétních vyhovujících skupin (například skupiny čísel od 101 do 121) žádný bod neudělujte, nejsou-li uhodnuty všechny — v tom případě udělte 1 bod.

**2.** Nejprve dokážeme, že v množině $\mathsf{A}$ mohou být nejvýše dvě čísla. Připusťme, že $\mathsf{A}$ obsahuje tři čísla $a < b < c$. Potom do $\mathsf{B}$ patří čísla $a + b < a + c < b + c$, a tedy do $\mathsf{A}$ musí patřit číslo

$$\frac{b + c}{a + c} = 1 + \frac{b - a}{a + c};$$

to však není celé, neboť $0 < b - a < a + c$.

Kdyby množina $\mathsf{B}$ obsahovala čtyři čísla $k < l < m < n$, patřila by do $\mathsf{A}$ tři různá čísla $n/k$, $n/l$, $n/m$. Množina $\mathsf{B}$ má tedy nejvýše tři prvky a $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ nemůže mít více než pět prvků.

Tohoto počtu dosáhneme, právě když bude $\mathsf{A} = \{a, b\}$, $\mathsf{B} = \{k, l, m\}$, přičemž $a < b$ a $l/k = m/l = a$, $m/k = b$. Potom $b = a^2$ $(a \geqq 2)$ a jedním z prvků množiny $\mathsf{B}$ je $a + a^2$; dalšími dvěma jsou pak buď $a^2 + a^3$ a $a^3 + a^4$, nebo $1 + a$ a $a^2 + a^3$. Pět prvků tak mají dohromady např. množiny $\mathsf{A} = \{2, 4\}$, $\mathsf{B} = \{3, 6, 12\}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Tři body dejte za důkaz nerovnosti $|\mathsf{A}| \leqq 2$, jeden bod za důkaz nerovnosti $|\mathsf{B}| \leqq |\mathsf{A}| + 1$ a dva body za nalezení (stačí jednoho) příkladu množin $\mathsf{A}$ a $\mathsf{B}$, pro něž $|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = 5$.

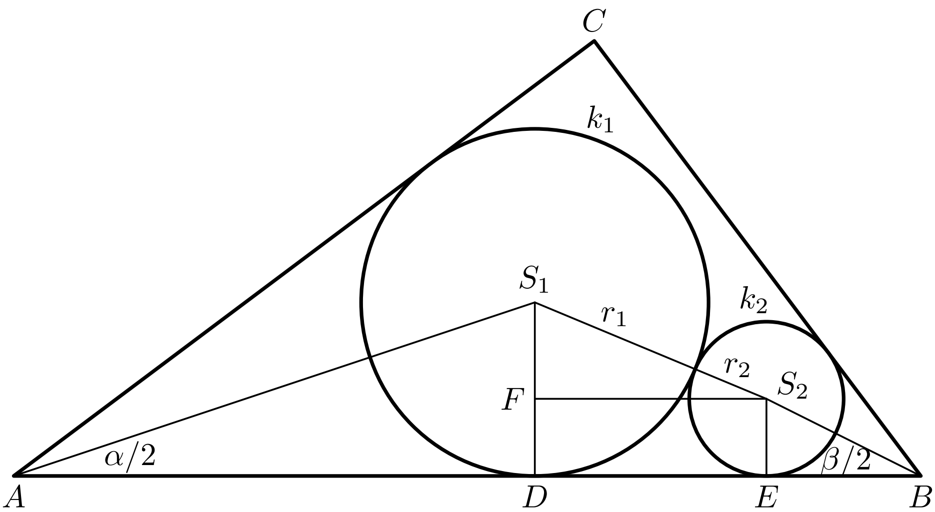
**3.** Přepona $AB$ má podle Pythagorovy věty délku $|AB| = 5$. Při obvyklém označení velikostí úhlů a stran proto platí $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$,

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 3,$$
$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2.$$

Protože podle zadání leží obě kružnice $k_1$, $k_2$ celé v trojúhelníku $ABC$, musejí mít vnější dotyk — kdyby měly vnitřní dotyk (v bodě přepony), byla by větší kružnice proťata odvěsnou dotýkající se menší kružnice. Označme $D$ a $E$ dotykové body kružnic $k_1$ a $k_2$ se stranou $AB$ a $F$ kolmý průmět bodu $S_2$ na úsečku $S_1D$ (obr. 1, podle předpokladu je $r_1 > r_2$). Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník $FS_2S_1$ platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |DE|^2,$$

odtud $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$.




Obr. 1

Z rovnosti $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$ máme

$$c = r_1 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = 3r_1 + 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2} + 2r_2,$$

a protože $r_1 = \frac{9}{4} r_2$, dostáváme

$$\frac{27}{4} r_2 + 3r_2 + 2r_2 = 5,$$

a tedy

$$r_2 = \frac{20}{47}, \quad r_1 = \frac{45}{47}.$$

*Poznámka.* Obě kružnice s určenými poloměry skutečně leží v trojúhelníku $ABC$, neboť kružnice mu vepsaná má poloměr $\varrho = ab/(a + b + c) = 1$, zatímco obě hodnoty $r_1$, $r_2$ jsou menší než 1.

Jinou možnost, jak vypočítat hodnotu $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$, poskytuje pravoúhlý trojúhelník $ATS$, kde $S$ je střed kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ a $T$ bod dotyku této kružnice se stranou $AB$. Platí

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{|AT|}{|ST|}=\frac{b+c-a}{2\varrho}=3;$$

podobně

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\frac{a+c-b}{2\varrho}=2.$$

A další možnost: V pravoúhlém trojúhelníku $XCB$ s odvěsnami délek $|XC|=c+b$, $|CB|=a$ má úhel $BXC$ velikost $\frac{1}{2}\alpha$ (při umístění bodu $X$ na polopřímku $CA$ totiž vznikne rovnoramenný trojúhelník $XBA$), a proto

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{c+b}{a}\quad\text{a podobně}\quad\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\frac{c+a}{b}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dejte jeden bod za vyjádření $|DE|=2\cdot\sqrt{r_1r_2}$, jeden bod za rovnosti $|AD|=r_1\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$, $|BE|=r_2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$, dva body za výpočet hodnot $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$, jeden bod za sestavení rovnosti $c=r_1\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha+2\cdot\sqrt{r_1r_2}+r_2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$, jeden bod za výpočet poloměrů $r_1$, $r_2$. Ověření, že kružnice s těmito poloměry leží v trojúhelníku $ABC$, může v jinak úplném řešení chybět, stejně jako úvodní konstatování o vnějším dotyku zkoumaných kružnic.

**4.** Nechť $a$, $b$, $c$ jsou kladná čísla. Hledáme řešení soustavy rovnic v množině kladných čísel. Vzhledem k podmínce $x+y+z=1$ musejí být čísla $x$, $y$, $z$ v intervalu $(0,1)$. Dosazením $z=1-x-y$ do zbylých rovnic dostaneme

$$a(y-xy-y^2+x)=c(xy+1-x-y),\quad b(x-x^2-xy+y)=c(xy+1-x-y),$$

po úpravě

$$ay(1-y)+ax(1-y)=c(1-x)(1-y),\quad bx(1-x)+by(1-x)=c(1-x)(1-y),$$

a protože $x<1$, $y<1$, máme

$$ay+ax=c-cx,\quad bx+by=c-cy.$$

Sečtením a odečtením posledních dvou rovnic určíme hodnoty

$$x+y=\frac{2c}{a+b+c}\qquad\text{a}\qquad x-y=\frac{(b-a)(x+y)}{c}=\frac{2(b-a)}{a+b+c};$$

opětovným sečtením a odečtením již získáme vzorce pro $x$, $y$ a jejich dosazením do $z=1-x-y$ i vzorec pro $z$:

$$x=\frac{b+c-a}{a+b+c},\quad y=\frac{c+a-b}{a+b+c},\quad z=\frac{a+b-c}{a+b+c}.\tag{1}$$

Řešení v množině kladných čísel proto existuje, právě když platí $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, což jsou známé trojúhelníkové nerovnosti.

Zkouška dosazením nalezených hodnot (1) do původní soustavy není nutná, protože všechny provedené úpravy byly za uvedených předpokladů ekvivalentní.

**Jiné řešení.** Uvedeme ještě poněkud přehlednější způsob odvození vzorců (1). Díky podmínce $x + y + z = 1$ lze zřejmě přepsat první část uvažované soustavy rovnic do tvaru

$$a(1-y)(1-z) = b(1-z)(1-x) = c(1-x)(1-y), \tag{2}$$

odkud po vydělení výrazem $(1-x)(1-y)(1-z)$ (různým od nuly, dokonce jak víme kladným) dostaneme ekvivalentní rovnice

$$\frac{a}{1-x} = \frac{b}{1-y} = \frac{c}{1-z}.$$

Označíme-li $s$ společnou (kladnou) hodnotu posledních tří zlomků, snadno získáme vyjádření

$$x = 1 - \frac{a}{s}, \quad y = 1 - \frac{b}{s}, \quad z = 1 - \frac{c}{s}, \tag{3}$$

jež po dosazení do rovnice $x + y + z = 1$ vedou k určení hodnoty

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pro takové $s$ pak již z vyjádření (3) dostaneme kýžené vzorce (1), a tím i důkaz tvrzení úlohy.

Dodejme, že díky přepisu (2) by bylo nyní schůdné provést zkoušku přímým dosazením, avšak ani teď to není — s ohledem na platná vyjádření (3) — nezbytné.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za korektní odvození vzorců (1) a 1 bod za souvislost vzorců (1) s trojúhelníkovými nerovnostmi. Při odvození vzorců (1) eliminačním postupem udělte 1 bod za přechod k soustavě dvou rovnic o dvou neznámých (řekněme $x$ a $y$ užitou eliminací $z = 1 - x - y$), 3 body za linearizaci této soustavy krácením činiteli $1 - x$ a $1 - y$ (chybí-li vysvětlení, proč to jsou nenulové hodnoty, strhněte 1 bod) a konečně 1 bod za vyřešení lineární soustavy pro neznámé $x$, $y$ a dopočítání eliminovaného $z$ (lze akceptovat i prohlášení, že vzorec pro $z$ musí mít s ohledem na symetrii tvar analogického zlomku).