**62. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie B

**1.** Pro libovolná reálná čísla $p \neq 0$, $q$ a $k \neq \pm 1$ dokažte tvrzení: Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má v oboru reálných čísel dva kořeny, z nichž jeden je $k$-násobkem druhého, právě když platí $kp^2 = (k+1)^2 q$.

**2.** Obec má 100 obyvatel. Víme, že každý z nich má v obci právě tři známé. (Známost je vzájemným vztahem.)

a) Dokažte, že v obci existuje skupina 25 osob, z nichž se žádné dvě neznají.

b) Najděte nejmenší přirozené číslo $n$ s vlastností, že v libovolné skupině $n$ osob každé takové obce existuje dvojice známých.

**3.** Určete všechny trojice $(a, b, c)$ celých kladných čísel, pro něž platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

**4.** V rovině jsou dány kružnice $m$, $n$, které se protínají v bodech $K$, $L$. Tečna v bodě $K$ ke kružnici $m$ protíná kružnici $n$ v bodě $A \neq K$, tečna v bodě $L$ ke kružnici $n$ protíná kružnici $m$ v bodě $C \neq L$. Bod $B \neq L$ je průsečík přímky $AL$ s kružnicí $m$ a bod $D \neq K$ je průsečík přímky $CK$ s kružnicí $n$. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

Krajské kolo kategorie B se koná

**v úterý 9. dubna 2013**

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

## 62. ročník matematické olympiády

*Řešení úloh krajského kola kategorie B*

**1.** Čísla $x_1$, $x_2$ jsou kořeny dané kvadratické rovnice, právě když platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \tag{1}$$

Předpokládejme, že daná kvadratická rovnice má reálné kořeny $x_1 = \alpha$, $x_2 = k\alpha$. Dosazením do (1) dostaneme $(k+1)\alpha = -p$ a $k\alpha^2 = q$. Pro obě strany dokazované rovnosti $kp^2 = (k+1)^2 q$ odtud plyne

$$kp^2 = k\bigl(-(k+1)\alpha\bigr)^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$
$$(k+1)^2 q = (k+1)^2 \cdot k\alpha^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

tudíž daná rovnost skutečně platí.

Nechť naopak pro reálná čísla $p$, $q$ a $k \neq -1$ platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. Uvažujme následující dvojici reálných čísel $x_1$, $x_2$

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Taková čísla (pro něž platí $x_1 = kx_2$) jsou kořeny dané kvadratické rovnice, splňují-li obě rovnosti (1). Ověření provedeme dosazením:

$$x_1 + x_2 = \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p,$$
$$x_1 x_2 = \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 q}{(k+1)^2} = q.$$

Tím je celý důkaz hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení soustavy rovnic (1) spolu s podmínkou $x_2 = kx_1$. Další 1 bod udělte za eliminaci některých proměnných z této soustavy rovnic. Za důkaz první implikace pak udělte 2 body, za důkaz opačné implikace také 2 body.

**2.** a) Předpokládejme, že existuje skupina $N$ o $k$ osobách, ve které není dvojice známých. (Určitě alespoň pro $k = 1$ taková skupina existuje.) Do skupiny $O$ zařaďme všechny osoby, které mají alespoň jednoho známého ve skupině $N$. Ve skupině $O$ je nejvýše $3k$ osob. V obou skupinách $O$ a $N$ je tedy dohromady nejvýše $4k$ osob. Proto v případě $4k < 100$ ($k < 25$) můžeme v obci najít osobu, která nepatří do žádné ze skupin $N$ a $O$. Pokud ji přidáme ke skupině $N$, nebude v takto vytvořené skupině žádná dvojice známých a tato skupina bude mít $k + 1$ osob. Opakováním tohoto postupu tak získáme skupinu alespoň 25 osob, ve které neexistuje dvojice známých, což dokazuje tvrzení a).

b) Ukážeme, že skupina, ve které neexistuje dvojice známých, sestává nejvýše z 50 osob. Předpokládejme, že existuje skupina $M$ čítající $m$ osob, v níž neexistuje dvojice známých. Každý člověk ze skupiny $M$ se tedy zná se třemi osobami ze zbývající skupiny $100 - m$ osob. To je celkem $3m$ známostí, což nemůže být více, než činí celkový počet známostí lidí ze skupiny mimo $M$, a ten je nejvýše (někteří se mohou znát navzájem) $3(100 - m)$, proto $3m \leqq 3(100 - m)$, neboli $m \leqq 50$, což jsme chtěli dokázat.

V obci mohou existovat dokonce dvě padesátičlenné skupiny, v nichž se nevyskytuje žádná dvojice známých. Např. když se osoba 1 zná s osobami 51, 52, 53, osoba 2 se zná s osobami 52, 53 a 54, …, osoba 48 se zná s osobami 98, 99 a 100, osoba 49 se zná s osobami 99, 100, 51 a osoba 50 se zná s osobami 100, 51, 52. Každá z osob tak má tři známé a ve skupinách osob $1, 2, \ldots, 50$ a $51, 52, \ldots, 100$ neexistuje žádná dvojice známých.

Číslo $n = 51$ je tedy nejmenším přirozeným číslem s vlastností, že ve skupině $n$ osob, z nichž každá má v obci se 100 obyvateli právě tři známé, vždy existuje dvojice známých.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz části a) udělte nejvýše 2 body. Za část b) udělte nejvýše 4 body, z toho 2 body za konstrukci případu, kdy existuje skupina 50 osob, z nichž žádné dvě se neznají, 2 body za důkaz, že v každé skupině 51 osob lze najít dvojici známých.

**3.** Danou rovnici můžeme přepsat jako

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{2c}. \tag{2}$$

Označme $m = \min(a + 2b + 1, 2a, 4b)$. Levou stranu rovnice (2) tak můžeme zapsat ve tvaru

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^m(2^{a+2b+1-m} + 2^{2a-m} + 2^{4b-m}).$$

Přitom alespoň jeden z exponentů $(a+2b+1-m, 2a-m, 4b-m)$ je nulový a příslušná mocnina dvojky je tak rovna 1. Pokud by zbývající dva exponenty byly kladné, bylo by v závorce číslo liché, což by znamenalo, že $2^{2c}$ je dělitelné lichým číslem větším než 1. Proto jsou nulové alespoň dva z exponentů, takže v trojici $(a + 2b + 1, 2a, 4b)$ existují dvě stejná čísla, která jsou nejvýše rovna třetímu z nich.

Pokud by bylo $a + 2b + 1 = 2a$, dostali bychom $a = 2b + 1$, což je ve sporu s předpokládanou nerovností $2a \leqq 4b$. Podobně z rovnosti $a + 2b + 1 = 4b$ plyne $a = 2b - 1$, což je ve sporu s nerovností $4b \leqq 2a$. Nutně tedy platí $2a = 4b$, tj. $a = 2b$.

Levá strana dané rovnice tak má tvar

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{4b+1} + 2^{4b} + 2^{4b} = 4 \cdot 2^{4b} = 2^{4b+2}.$$

Proto je rovnice splněna, právě když $2c = 4b + 2$ neboli $c = 2b + 1$.

Pro libovolné přirozené číslo $b$ je tak trojice $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$ řešením dané rovnice a žádná jiná řešení neexistují.

**Jiné řešení.** Levou stranu dané rovnice můžeme upravit následujícím způsobem:

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 2 \cdot 2^a \cdot 4^b + (2^a)^2 + (4^b)^2 = (2^a + 4^b)^2.$$

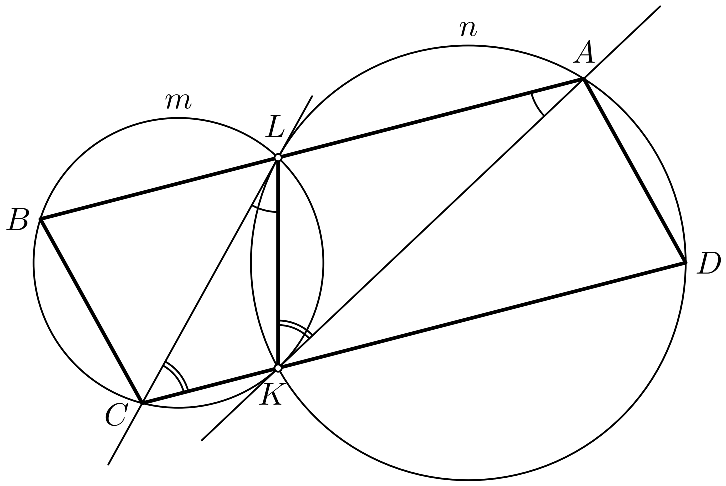
Po odmocnění obou stran tak dostaneme ekvivalentní rovnici

$$2^a + 4^b = 2^c \qquad \text{neboli} \qquad 2^a + 2^{2b} = 2^c.$$

Z jednoznačnosti zápisu čísla ve dvojkové soustavě nebo způsobem podobným řešení úlohy B–I–1 pak můžeme zjistit, že $a = 2b$, odkud plyne $c = 2b + 1$. Stejně jako v předcházejícím řešení jsme tak došli k závěru, že všechna řešení rovnice jsou tvaru $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$, kde $b$ je libovolné přirozené číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu jako v prvním řešení udělte 1 bod za vyjádření členů rovnice coby mocniny čísla 2, 2 body za důkaz, že se v trojici $(a + 2b + 1, 2a, 4b)$ musejí dva členy sobě rovnat, 1 bod za důkaz, že platí $2a = 4b$, za výpočet $c$ a za uvedení správné odpovědi zbývající 2 body. Při druhém postupu udělte 3 body za vyjádření levé strany rovnice jako druhé mocniny, 2 body za úvahu vedoucí k rovnosti $a = 2b$ a 1 bod za dopočet $c$ a správnou odpověď.

**4.** Obvodový úhel $KAL$ a úsekový úhel $CLK$ tětivy $KL$ v kružnici $n$ jsou shodné. Podobně se shodují i obvodový úhel $KCL$ a úsekový úhel $AKL$ tětivy $KL$ v kružnici $m$. Trojúhelníky $AKL$ a $LCK$ se tak shodují ve dvou vnitřních úhlech, a proto se shodují i ve třetím úhlu. Úhly $ALK$ a $LKC$ jsou tudíž shodné, a proto jsou shodné i jejich doplňky do 180°, kterými jsou obvodové úhly $ADK$, resp. $LBC$ v uvažovaných kružnicích. Shodnost úhlů $ALK$ a $LKC$ dokazuje rovnoběžnost přímek $AL$ a $CK$ (tedy přímek $AB$ a $CD$), která spolu se shodností úhlů $ADK$ a $LBC$ znamená, že i přímky $AD$ a $BC$ jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy rovnoběžník, což jsme chtěli dokázat.




Obr. 1

*Poznámka.* Jakmile pomocí shodných úhlů $ALK$ a $LKC$ zjistíme, že přímky $AB$ a $CD$ jsou rovnoběžné, můžeme konstatovat, že oba tětivové čtyřúhelníky $ADLK$ a $BLKC$ jsou buď pravoúhelníky, nebo rovnoramenné lichoběžníky se shodnými úhly při základnách. V obou případech to už zřejmě zaručuje rovnoběžnost druhé dvojice přímek $AD$ a $BC$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Tvrzení o rovnostech dvojic úhlů $KAL$, $CLK$ a $KCL$, $AKL$ oceňte po 1 bodu, za důkaz rovnoběžnosti $AB$ a $CD$ udělte 2 body a za důkaz rovnoběžnosti $AD$ a $BC$ další 2 body.