62. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. V tanečních se sešla skupina chlapců a děvčat. Každý z přítomných 15 chlapců zná právě 4 dívky a každé děvče zná právě 10 hochů. (Známost je vzájemným vztahem.) Ukažte, že libovolní dva chlapci mají alespoň dvě společné známé.

2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K a v pásu mezi rovnoběžkami BC a AD v polorovině opačné k CDA je dán bod L. Obsahy trojúhelníků ABK, BCK, DAK a DCL jsou $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte obsahy trojúhelníků CDK a ABL.

3. Najděte všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž je číslo $a^2 + b$ o 62 větší než číslo $b^2 + a$.

4. Určete nejmenší celé kladné číslo v, pro které platí: Mezi libovolnými v vrcholy pravidelného dvacetiúhelníku lze najít tři, jež jsou vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 9. dubna 2013

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

62. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Do každé známosti vstupuje právě jeden chlapec a každý z chlapců má právě čtyři známosti, celkem tedy v tanečních existuje $15 \cdot 4 = 60$ známostí. V každé známosti je ovšem zastoupena právě jedna dívka a každá dívka má právě deset známostí. Označíme-li d počet dívek, pak $10 \cdot d = 60$. V tanečních je tudíž 6 dívek. Uvažme libovolného z hochů, řekněme Tondu. Tonda zná 4 dívky, v tanečních jsou tedy pouze dvě dívky, které Tonda nezná. Libovolný další hoch však zná rovněž čtyři dívky, musí tak znát alespoň dvě z dívek, které zná Tonda.

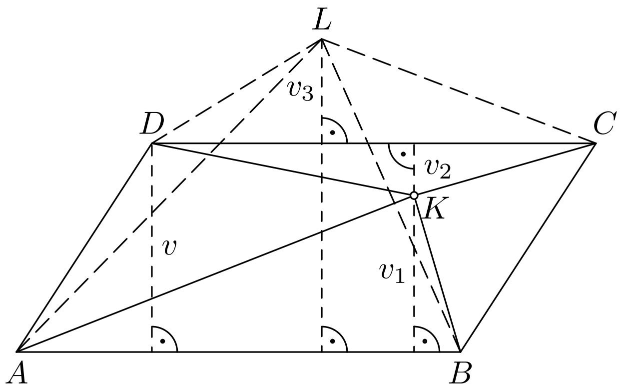
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Odvození celkového počtu známostí oceňte dvěma body a určení počtu dívek dalšími dvěma body.

2. Trojúhelníky ABK a CDK mají shodné strany AB a CD a součet jejich výšek v_1 a v_2 (vzdáleností bodu K od přímky AB, resp. CD) je roven výšce v rovnoběžníku $ABCD$ (vzdálenosti rovnoběžných přímek AB a CD, obr. 1). Proto součet jejich obsahů dává polovinu součtu obsahu daného rovnoběžníku:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobně i $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, tudíž

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$



Obr. 1

Trojúhelníky ABL a DCL mají shodné strany AB a CD. Značí-li v_3 příslušnou výšku druhého z nich, je výška prvního z nich rovna $v + v_3$, takže pro rozdíl obsahů těchto trojúhelníků platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) = \\ = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

Odtud plyne

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení každého z obsahů udělte 3 body. Za pouhé objevení (a důkaz) faktu, že součet obsahů „protějších“ trojúhelníků ABK a CDK či BCK a AKD dává polovinu obsahu celého rovnoběžníku, udělte 2 body.

3. Zadání zapíšeme rovností, jejíž pravou stranu rovnou upravíme na součin:

$$62 = (a^2 + b) - (b^2 + a) = (a^2 - b^2) - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Součin celých čísel $u = a - b$ a $v = a + b - 1$ je tedy roven součinu dvou prvočísel $2 \cdot 31$. Protože $v \geqq 1 + 1 - 1 = 1$, je nutně i číslo u kladné a zřejmě $u < v$, takže (u, v) je jedna z dvojic $(1, 62)$ nebo $(2, 31)$. Vyjádříme-li naopak a, b pomocí u, v, dostaneme

$$a = \frac{u + v + 1}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{v - u + 1}{2}.$$

Pro $(u, v) = (1, 62)$ tak dostáváme řešení $(a, b) = (32, 31)$, dvojici $(u, v) = (2, 31)$ odpovídá druhé řešení $(a, b) = (17, 15)$. Jiná řešení úloha nemá.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uhodnutí obou řešení udělte 1 bod (tj. za pouze jedno uhodnuté řešení žádný bod). Za uvedený rozklad dejte 2 body, a pokud si je řešitel vědom, že mu stačí prozkoumat pouze konečně mnoho možností, přidejte další 1 bod.

4. Nechť $A_1A_2 \ldots A_{20}$ je pravidelný dvacetiúhelník. Podle Thaletovy věty jedině některý z deseti průměrů $A_1A_{11}, A_2A_{12}, \ldots, A_{10}A_{20}$ opsané kružnice může být přeponou kýženého pravoúhlého trojúhelníku, takže zkoumané tvrzení neplatí pro $v = 10$ (ani pro žádné $v < 10$): stačí vybrat po jednom z vrcholů na různých průměrech a nebude existovat žádný pravoúhlý trojúhelník s takto vybranými vrcholy.

Ve druhé části řešení ukážeme, že vyhovuje $v = 11$. Všech 20 vrcholů dvacetiúhelníku rozdělíme do pěti čtveřic vrcholů čtverců $A_1A_6A_{11}A_{16}$, $A_2A_7A_{12}A_{17}$, $A_3A_8A_{13}A_{18}$, $A_4A_9A_{14}A_{19}$ a $A_5A_{10}A_{15}A_{20}$. Vybereme-li nyní libovolně 11 vrcholů, budou díky nerovnosti $11 > 5 \cdot 2$ mezi vybranými aspoň tři vrcholy některého z pěti uvedených čtverců (Dirichletův princip). Zbývá dodat, že jakékoli tři vrcholy čtverce zřejmě tvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Odpověď. Hledané nejmenší číslo v je rovno číslu 11.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za jakýkoliv správný protipříklad pro $v = 10$ a 4 body za důkaz vlastnosti pro $v = 11$.