62. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Jihlava, 17.–20. března 2013

1. *Najděte všechny dvojice celých čísel a, b, pro něž platí rovnost*

$$\frac{a^2+1}{2b^2-3} = \frac{a-1}{2b-1}.$$

(Pavel Novotný)

Řešení. Zřejmě $a \neq 1$, proto můžeme danou rovnost přepsat na tvar

$$\frac{a^2+1}{a-1} = \frac{2b^2-3}{2b-1}. \tag{1}$$

Zatímco čitatel zlomku na levé straně je kladný, je čitatel druhého zlomku záporný jen pro $b \in \{-1, 0, 1\}$.

Přitom pro $b = -1$ dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici $3a^2 - a + 4 = 0$, která nemá nemá reálné řešení, a podobně i pro $b = 0$: ani rovnice $a^2 - 3a + 4 = 0$ nemá reálné řešení.

Pro $b = 1$ dostaneme rovnici $a^2 + a = a(a+1) = 0$, která má dvě řešení $a \in \{0, -1\}$. Dostáváme tak dvě dvojice $(0, 1)$ a $(-1, 1)$, jež vyhovují dané rovnosti.

Předpokládejme dále, že $2b^2 - 3 > 0$, a zjistěme, kterými přirozenými čísly lze zlomky v (1) krátit.

Jestliže číslo n dělí $a^2 + 1$ a $a - 1$, musí dělit i $a^2 + 1 - (a+1)(a-1) = 2$. Podobně jestliže číslo n dělí $2b^2 - 3$ a $2b - 1$, musí dělit i $(2b-1)(2b+1) - 2(2b^2-3) = 5$. Vzhledem k tomu jsou právě čtyři možnosti, jak dosáhnout rovnosti zlomků v (1):

(i) $a^2 + 1 = 2b^2 - 3$ a $a - 1 = 2b - 1$; dosazením $a = 2b$ do první rovnice dostaneme vztah $4b^2 + 1 = 2b^2 - 3$, který neplatí pro žádné reálné b.

(ii) $a^2 + 1 = 2(2b^2 - 3)$ a $a - 1 = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = 4b - 1$ do první rovnice, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $3b^2 - 2b + 2 = 0$, která nemá reálná řešení.

(iii) $5(a^2+1) = 2b^2 - 3$ a $5(a-1) = 2b - 1$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(2b+4)$ do první rovnice, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $3b^2 - 8b - 28 = 0$, jež má celočíselné řešení $b = -2$. Tomu odpovídá $a = 0$.

(iv) $5(a^2 + 1) = 2(2b^2 - 3)$ a $5(a - 1) = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(4b + 3)$ do první rovnice a dostaneme kvadratickou rovnici $b^2 - 6b - 16 = 0$ se dvěma celočíselnými kořeny $b = -2$ a $b = 8$, kterým odpovídají hodnoty $a = -1$ a $a = 7$.

Úloze tedy vyhovuje celkem pět celočíselných dvojic (a, b):

$$(0,1),\ (-1,1),\ (0,-2),\ (-1,-2),\ (7,8).$$

Jiné řešení. Vyjdeme z upravené rovnosti (1), kterou napíšeme ve tvaru

$$a + 1 + \frac{2}{a-1} = b + \frac{b-3}{2b-1}. \tag{2}$$

Pro $a < -1$ a pro $a > 3$ zřejmě platí $|a - 1| > 2$. Podobně pro $b < -2$ i pro $b > 3$ platí

$$0 < \frac{b-3}{2b-1} < 1.$$

Proto napřed vypočítáme hodnoty obou zlomků v (1) pro $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$ ($a \neq 1$) a $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$:

a	-1	0	2	3
$\dfrac{a^2+1}{a-1}$	-1	-1	5	5

b	-2	-1	0	1	2	3
$\dfrac{2b^2-3}{2b-1}$	-1	$\frac{1}{3}$	3	-1	$\frac{5}{3}$	3

Porovnáním obou tabulek nacházíme čtyři řešení: $(-1,-2), (-1,1), (0,-2), (0,1)$.

Pro zbývající hodnoty a, b platí

$$-1 < \frac{b-3}{2b-1} - \frac{2}{a-1} = a+1-b < 2,$$

takže zbývají jen dvě možnosti: $a+1-b=0$ nebo $a+1-b=1$.

Jestliže $a=b-1$, dostaneme dosazením do (2) kvadratickou rovnici $b^2-9b+8=0$, která má dvě celočíselná řešení $b=1$ a $b=8$. Dostáváme tak další řešení $(7,8)$.

Pro $a=b$ dostaneme dosazením do (2) kvadratickou rovnici $b^2+5b-4=0$, která žádné celočíselné řešení nemá.

---

2. *Každý ze zbojníků v n-členné družině ($n \geqq 3$) naloupil určitý počet mincí. Všech naloupených mincí bylo $100n$. Zbojníci se rozhodli rozdělit kořist následujícím způsobem: v každém kroku dá jeden ze zbojníků po jedné minci jiným dvěma. Najděte všechna přirozená čísla $n \geqq 3$, pro která po konečném počtu kroků může mít každý zbojník 100 mincí bez ohledu na to, kolik mincí jednotliví zbojníci naloupili.*

(Ján Mazák)

Řešení. Označme z_i počet mincí, které má i-tý zbojník (čísla z_i se v průběhu dělení budou měnit).

Nechť $n=3$. Po libovolném kroku se nezmění zbytek čísla z_1-z_2 při dělení třemi. Pokud tedy byly počáteční stavy například $z_1=101$, $z_2=100$, a $z_3=99$, nemůže nikdy nastat rovnost $z_1=z_2$. Číslo $n=3$ tedy úloze nevyhovuje.

Ukážeme, že pro každé $n \geqq 4$ a libovolné počáteční hodnoty z_i dosáhneme po konečném počtu vhodných kroků stavu, v němž bude mít každý zbojník 100 mincí.

Označme $s=\sum|z_i-100|$. Číslo s budeme zmenšovat, dokud to bude možné, tak, že v každém kroku některý ze zbojníků, kteří mají nejvíce, dá po jedné minci některým dvěma, kteří mají nejméně. Nechť už se takovým způsobem číslo s nedá zmenšit. Pokud $s=0$, skončili jsme.

Pokud $s \neq 0$, má některý zbojník $100-k$ mincí ($k>0$), k zbojníků má po 101 minci a všichni ostatní mají po 100 mincí. Pokud $k \geqq 2$, zmenšíme hodnotu s ve dvou krocích:

$$100-k, 101, 101 \longrightarrow 100-k+1, 102, 99 \longrightarrow 100-k+2, 100, 100.$$

Je-li k sudé, bude mít po $\frac{1}{2}k$ takých dvojkrocích každý zbojník 100 mincí. Pokud je k liché, dostaneme se do stavu, v němž má jeden zbojník 99 mincí, jeden jich má 101 a všichni ostatní mají po 100. Pak už dělení snadno dokončíme:

$$99, 100, 100, 101 \longrightarrow 99, 101, 101, 99 \longrightarrow 99, 102, 99, 100 \longrightarrow 100, 100, 100, 100.$$

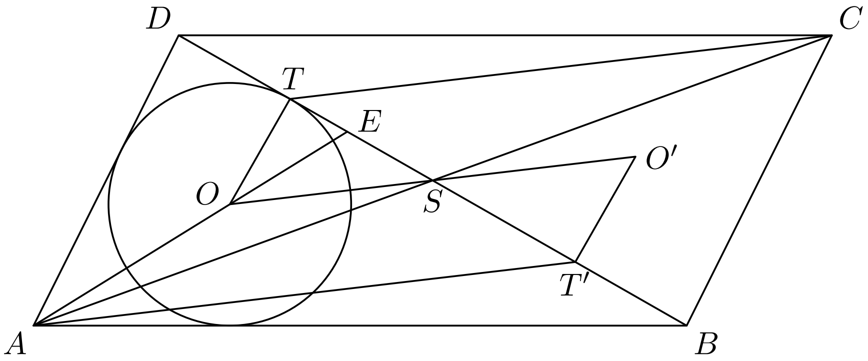
Jiné řešení. Pro neprázdnou množinu Z zbojníků označme $r(\mathsf{Z})$ rozdíl mezi počty mincí nejbohatšího a nejchudšího člena množiny Z. Na počátku vybereme některého nejbohatšího zbojníka A (libovolného z těch, kteří naloupili nejvíce mincí) a označíme Z množinu zbývajících zbojníků. Pokud $r(\mathsf{Z}) \geqq 2$, dá jeden z nejbohatších zbojníků ze Z minci nejchudšímu a minci zbojníkovi A. Takto pokračujeme, dokud platí $r(\mathsf{Z}) \geqq 2$. Protože počet mincí zbojníka A stále roste a mincí je jen konečný počet, po konečném počtu kroků bude $r(\mathsf{Z}) \leqq 1$.

Od tohoto okamžiku v každém dalším kroku začne dávat zbojník A, dokud má aspoň 102 mince, po jedné minci dvěma nejchudším. Nerovnost $r(\mathsf{Z}) \leqq 1$ přitom zůstává zachována. Jakmile nastane situace, že zbojník A má méně než 102 mince, jsou dvě možnosti: Buď má zbojník A právě 100 mincí a dělení je skončeno; anebo má 101 mincí, takže jeden ze zbojníků musí mít 99 mincí a všichni ostatní ze Z po 100. Dělení pak skončíme stejně jako v prvním řešení.

3. *V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ a $c = |BD|$. Případ $a = b$ je triviální (tehdy obě přímky OS a CT splývají s přímkou AC), budeme proto dále předpokládat, že $a > b$ (v případě $a < b$ stačí vyměnit označení vrcholů B a D).

Označme T' obraz bodu T v souměrnosti podle středu S (v níž A je obrazem bodu C). Protože $CT \parallel AT'$, je naším cílem dokázat, že $OS \parallel AT'$. Dosáhneme toho ověřením stejnolehlosti trojúhelníků $AT'E$ a OSE, kde E je průsečík polopřímky AO s úhlopříčkou BD (obr. 1). Díky předpokladu $a > b$ a tomu, že AE je osa úhlu BAD, leží bod E mezi body S a D stejně jako bod T (ten jakožto kolmý průmět bodu O leží mezi body E a D), zatímco bod T' leží mezi body S a B.



Obr. 1

Potřebnou (i postačující) rovnost poměrů

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|T'S|}{|SE|} \tag{1}$$

dokážeme tak, že je vyjádříme pomocí délek a, b, c. Jak je známo,

$$|DT| = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{a proto} \quad |T'S| = |TS| = \frac{c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Z vlastností os úhlů v trojúhelnících ABD a AED plynou rovnosti

$$|BE| : |ED| = |AB| : |AD| \quad \text{a} \quad |AO| : |OE| = |AD| : |DE|,$$

z nichž postupně dostaneme

$$|BE| = \frac{ac}{a+b} \quad \text{a} \quad |DE| = \frac{bc}{a+b},$$

$$|SE| = |BE| - |BS| = \frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)},$$

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{b}{\dfrac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Posledním zlomkem jsme vyjádřili hodnotu levé strany (1). Ukažme, že stejnou hodnotu má i pravá strana:

$$\frac{|T'S|}{|SE|} = \frac{\dfrac{a-b}{2}}{\dfrac{c(a-b)}{2(a+b)}} = \frac{a+b}{c}.$$

Tím je důkaz tvrzení úlohy uzavřen.

Jiné řešení. Označme T' bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku DBC se stranou BD. To je, jak je známo, současně bod, v němž se strany BD dotýká kružnice k' připsaná trojúhelníku ABD. Označme ϱ poloměr kružnice k vepsané trojúhelníku ABD a ϱ' poloměr kružnice k'. Bod E leží na spojnici středů kružnic k a k' i na jejich společné tečně, je tedy středem stejnolehlosti obou kružnic. Proto platí rovnost

$$\frac{|ET'|}{|ET|} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Označíme-li $|ST'| = |ST| = x$ a $|SE| = y$, máme

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b+c}{a+b-c} \quad \text{a odtud} \quad \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c},$$

takže

$$\frac{|ET'|}{|ES|} = \frac{x+y}{y} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Označíme-li v velikost výšky trojúhelníku ABD y vrcholu A, platí

$$\frac{|EA|}{|EO|} = \frac{v}{\varrho} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{|ET'|}{|ES|}.$$

Tím je stejnolehlost trojúhelníků EAT' a EOS, a tedy i rovnoběžnost přímek AT' a OS dokázána.

Analytické řešení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $D = [a,b]$. Potom $C = [a+1,b]$, $S = \left[\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}b\right]$. Bod O má stejnou vzdálenost od stran trojúhelníku ABD, proto jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$y = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-bx + (a-1)y + b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Označíme-li $c = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, $d = \sqrt{a^2+b^2}$, dostaneme

$$O = \left[\frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{c+d+1}\right].$$

Dále

$$T = B + \left(1 - \frac{a+d}{c+d+1}\right)\frac{D-B}{c} = \frac{1}{c+d+1}\left[c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}, b\left(\frac{1-a}{c}+1\right)\right].$$

Ověření lineární závislosti vektorů

$$S - O = \left[\frac{a+1}{2} - \frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{2}\left(1 - \frac{2}{c+d+1}\right)\right]$$

a

$$C - T = \left[a+1-\frac{c+d+a-(1-a)^2/c}{c+d+1}, b\left(1 - \frac{(1-a)/c+1}{c+d+1}\right)\right]$$

čili rovnosti

$$\begin{aligned}
&[(a+1)(c+d+1) - 2a - 2d]\left(c+d-\frac{1-a}{c}\right) = \\
&= \left[(a+1)(c+d+1) - c - d - a + \frac{(1-a)^2}{c}\right](c+d-1)
\end{aligned}$$

je už rutinní záležitostí.

4. *Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě celé kladné číslo N. Není-li jednomístné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m, které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m-3c|$. (Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1\,204$, po úpravě tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Najděte všechna přirozená čísla N, z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0.* (Peter Novotný)

Řešení. Nejdříve zjistíme, pro která čísla N dostaneme rovnou nulu. Zřejmě $|m-3c| = 0$, právě když $m = 3c$ neboli $N = 10m + c = 31c$. Všechny násobky $N = 31c$ pro $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ tudíž úloze vyhovují.

Dokážeme, že úloze vyhovují právě všechny přirozené násobky čísla 31. Protože $c = N-10m$, je $m-3c = 31m-3N$, takže popsaná operace zachovává dělitelnost číslem 31. Stačí tedy ukázat, že z libovolného násobku $N = 31k$, kde $k \geqq 10$, dostaneme popsanou úpravou vždy menší násobek čísla 31. Pro takové N je ovšem $m \geqq 31$, $m - 3c > 0$, tudíž $|m - 3c| = 31m - 3N < 4N - 3N = N$. Znamená to, že po konečném počtu kroků dostaneme popsanou úpravou některý z devíti nejmenších násobků čísla 31 a následně nulu. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Dá se dokonce ukázat, že nerovnost $|m - 3c| < N$ platí už pro každé $N \geqq 20$.

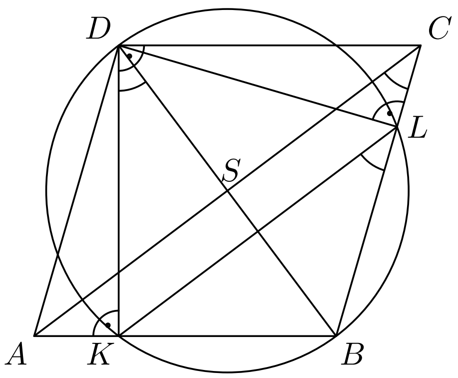
5. *Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že paty K, L kolmic z bodu D po řadě ke stranám AB, BC jsou jejich vnitřními body. Dokažte, že $KL \parallel AC$, právě když*

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|.$$

(Ján Mazák)

Řešení. Střídavé úhly ABD a CDB jsou shodné (obr. 2), proto $|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD| = 180°$. Rovnost $|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|$ tedy platí, právě když

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = 90°. \tag{1}$$



Obr. 2

Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem BD. Obvodový úhel BDK je tedy shodný s úhlem BLK, a proto (vzhledem k rovnosti střídavých úhlů ABD a CDB)

$$|\sphericalangle BLK| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDK| + |\sphericalangle CDB| = 90°.$$

Přímky KL a BC jsou ovšem rovnoběžné, právě když $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BCA|$, což je podle předchozí rovnosti ekvivalentní rovnosti (1). Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.

6. *Najděte všechna kladná reálná čísla p taková, že nerovnost*

$$\sqrt{a^2+pb^2}+\sqrt{b^2+pa^2} \geqq a+b+(p-1)\sqrt{ab}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel a, b. (Jaromír Šimša)

Řešení. Pro dvojici $a=b=1$ dostaneme pro parametr $p>0$ nerovnici, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{p+1} &\geqq p+1,\\ 2 &\geqq \sqrt{p+1},\\ p &\leqq 3. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že požadovanou vlastnost má každé $p \in (0,3\rangle$.

Pro $p \in (0,1\rangle$ je zadaná nerovnost splněna triviálně, neboť

$$\sqrt{a^2+pb^2} > a, \qquad \sqrt{b^2+pa^2} > b \quad \text{a} \quad (p-1)\sqrt{ab} \leqq 0.$$

Zabývejme se proto dále pouze případem $p \in (1,3\rangle$. Levou stranu L dokazované nerovnosti můžeme chápat jako velikost dvou vektorů $(a, b\sqrt{p})$, $(b, a\sqrt{p}) \in \mathbb{R}^2$, proto podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} L = \sqrt{a^2+pb^2}+\sqrt{b^2+pa^2} &= |(a,b\sqrt{p})|+|(b,a\sqrt{p})| \geqq \\ &\geqq |(a+b,(a+b)\sqrt{p})| = (a+b)\sqrt{1+p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pro pravou stranu P pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem naopak dostáváme horní odhad

$$P = a+b+(p-1)\sqrt{ab} \leqq a+b+(p-1)\frac{a+b}{2} = \frac{(p+1)(a+b)}{2}.$$

Nerovnost $L \geqq P$ je tak dokázána, neboť silnější nerovnost

$$(a+b)\sqrt{p+1} \geqq \frac{(p+1)(a+b)}{2}$$

je ekvivalentní s nerovností $\sqrt{p+1} \leqq 2$, jež je pro každé $p \in (1,3\rangle$ zřejmě splněna.

Poznámka. Odhad (1) dostaneme též použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro dvojice $(a, b\sqrt{p})$ a $(1, \sqrt{p})$: z nerovnosti

$$a+pb \leqq \sqrt{a^2+pb^2}\cdot\sqrt{1+p},$$

plyne první z nerovností

$$\sqrt{a^2+pb^2} \geqq \frac{a+pb}{\sqrt{1+p}}, \qquad \sqrt{b^2+pa^2} \geqq \frac{b+pa}{\sqrt{1+p}},$$

druhou odvodíme analogicky.