7. Středoevropská matematická olympiáda

Sedmý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 22.–28. srpna 2013 v maďarském Veszprému. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků z deseti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska). Do reprezentačních družstev byli přitom vybráni pouze soutěžící, kteří jsou ve školním roce 2013/2014 ještě žáky středních škol a v roce 2013 nebyli členy reprezentačního družstva na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO).

České reprezentační družstvo pro 7. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 62. ročníku české MO. Do družstva České republiky tak byli nominováni *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně. Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Michal Rolínek* z Institutu vědy a technologie ve Vídni. Česká účast byla hrazena z prostředků Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Jednoty českých matematiků a fyziků. Přípravné soustředění českého týmu před MEMO finančně podpořil Motorpal Jihlava.

Všichni účastníci přicestovali do Veszprému 22. srpna a byli ubytováni na vysokoškolských kolejí místní Panonské univerzity. Den po příjezdu členové jury, složené z vedoucích jednotlivých družstev, zasedali na Fakultě informačních technologií (FIT), kde vybrali soutěžní úlohy pro oba dny a připravili jejich překlady do svých jazyků.

V sobotu 24. srpna proběhla na FIT soutěž jednotlivců a o den později tamtéž i soutěž družstev. První soutěžní den byly žákům předloženy v soutěži jednotlivců čtyři úlohy, druhý den v soutěži družstev osm úloh. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh, opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako osmá úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha od *Michala Rolínka*. Zadání soutěžních úloh uvádíme na konci příspěvku spolu se zemí, která úlohu navrhla.

Po skončení soutěže zajistili organizátoři soutěžícím prohlídku zajímavostí v okolí Veszprému, navštívili zajímavou zříceninu v Nagyvaszony, opatsví v Tihany a nakonec i přes rozmary počasí došlo na koupání v Balatonu. Mezinárodní jury však pokračovala ve své práci. Řešení úloh byla po soutěži rozmnožena a nezávisle opravena vedoucími týmů a místními koordinátory, což byli většinou zkušení matematici, bývalí medailisté mezinárodních olympiád, z celého Maďarska. Po opravách se vedoucí týmů s koordinátory sešli, porovnali svá hodnocení a navrhli konečné výsledky. Při závěrečném zasedání jury tyto výsledky schválila.

Večer 27. srpna se konal závěrečný slavnostní ceremoniál, kde organizátoři vyhlásili výsledky. V soutěži jednotlivců byli tři nejlepší ohodnoceni zlatými medailemi (všichni z Maďarska), dalších třináct stříbrnými a devatenáct soutěžících bronzovými medailemi. Navíc šestnáct žáků obdrželo čestná uznání za úplné vyřešení aspoň jedné úlohy. Je potěšitelné, že se mezi oceněnými neztratili ani čeští žáci. *Martin Hora* a *Tomáš Novotný* byli ohodnoceni po 17 bodech a získali stříbrné medaile. *Viktor Němeček* s 12 body získal bronzovou medaili. *Matěj Konečný*, *Martin Raszyk* a *Pavel Turek* obdrželi čestná uznání. V dosavadní historii MEMO se tak jedná o nejlepší výsledek českého družstva, což podtrhuje i třetí místo (za Maďarskem a Polskem) v neoficiální soutěži národů, do níž se započítává součet bodů získaných všemi žáky v soutěži jednotlivců.

V soutěži družstev zvítězilo Polsko (57 bodů), následováno Maďarskem (53 b.) a Německem (40 b.). České družstvo pokračovalo v nečekaně dobrých výsledcích a spolu se Slovenskem (po 33 b.) obsadilo dělené 4.–5. místo. Uveďme pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí vybojovaných jednotlivými družstvy v soutěži jednotlivců. Česká republika (0–2–1), Chorvatsko (0–1–1), Litva (0–0–2), Maďarsko (3–2–0), Německo (0–0–3), Polsko (0–3–3), Rakousko (0–0–2), Slovensko (0–2–3), Slovinsko (0–1–2), Švýcarsko (0–2–2).

Po vyhlášení výsledků vedoucí německé delegace *Bernd Mulansky* srdečně pozval účastníky na další ročník soutěže, která se bude konat od 18. do 24. září 2014 v Drážďanech. Zájemci mohou získat podrobnější informace na internetových stránkách soutěže http://memo2013.mik.uni-pannon.hu/.

Uveďme ještě zadání všech dvanácti soutěžních úloh, za úlohou je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců

24. srpna 2013

1. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokažte platnost nerovnosti

$$2(a+b+c)\geq\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Určete všechny trojice (a,b,c), pro které nastane rovnost. (*Slovensko*)

2. Nechť n je kladné celé číslo. Na desce sestávající ze $4n\times 4n$ čtercových polí je umístěno $4n$ kamenů tak, že každý řádek i každý sloupec obsahuje jeden kámen. V jednom kroku můžeme jeden z kamenů přesunout na stranou sousedící pole. Několik kamenů se může současně nacházet na stejném poli. Cílem je obsadit kameny všechna pole jedné ze dvou úhlopříček.

Určete nejmenší číslo $k(n)$, pro něž je možné tohoto stavu dosáhnout po nejvýše $k(n)$ krocích bez ohledu na počáteční rozmístění kamenů.

(*Německo*)

3. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Pro jeho vnitřní bod N platí $2|\sphericalangle ANB|=180^\circ+|\sphericalangle ACB|$. Nechť D je průsečík přímky BN s přímkou rovnoběžnou s AN procházející bodem C. Bod P je průsečíkem os úhlů CAN a ABN.

Dokažte, že přímky DP a AN jsou navzájem kolmé. (*Chorvatsko*)

4. Nechť a a b jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla x a y, pro něž platí

$$\binom{x+y}{2} = ax + by.$$

(*Maďarsko*)

Soutěž družstev

25. srpna 2013

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

(*Patrik Bak, Slovensko*)

2. Nechť pro čísla x, y, z, $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $x+y \neq 0$, $z+w \neq 0$ a $xy + zw \geq 0$. Dokažte platnost nerovnosti

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

(*Švýcarsko*)

3. Na severní straně ulice stojí $n \geq 2$ domů. Domy jsou očíslovány od západu k východu po řadě čísly 1 až n. Číslo každého domu je napsáno na tabulce. Jednou se obyvatelé ulice rozhodli potrápit pošťáka a zaměnit tabulky následujícím způsobem: každá dvojice sousedních domů si daný den vymění tabulky právě jednou.

Kolik možných pořadí tabulek mohou obyvatelé ulice na konci dne takto získat? (*Maďarsko*)

4. V rovině uvažujme konečný počet bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Každý z těchto bodů lze obarvit buď červeně, nebo zeleně tak, aby libovolný trojúhelník s vrcholy stejné barvy obsahoval alespoň jeden bod jiné barvy.

Najděte největší možný počet bodů s touto vlastností. (*Maďarsko*)

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník PQR tak, aby $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a aby přímky PQ, QR a RP procházely po řadě body A, B a C. (Všechny body A, B, C, P, Q a R jsou navzájem různé.) (*Rakousko*)

6. Nechť K je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC takový, že přímka BC je společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům AKB a AKC. Průsečík přímek CK a AB označme D a průsečík přímek BK a AC označme E. Nechť

F je průsečík přímky BC s osou úsečky DE. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protíná kružnici k se středem F a poloměrem FD v bodech P a Q.

Dokažte, že PQ je průměr kružnice k. (*Slovensko*)

7. Do polí tabulky 2013×2013 byla postupně zleva doprava a shora dolů zapsána čísla od 1 do 2013^2. Poté jsme současně smazali každý řádek a každý sloupec obsahující alespoň jednu druhou mocninu celého čísla.

Kolik polí zůstalo? (*Rakousko*)

8. Na tabuli je napsán výraz

$$\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square.$$

Dva hráči, A a B, se střídají v tazích v následující hře, přičemž hráč A začíná. V každém tahu hráč nahradí symbol $\square$ kladným celým číslem. Když jsou všechny symboly $\square$ nahrazeny, hráč A nahradí každé ze znamének $\pm$ buď $+$, nebo $-$ (nezávisle na ostatních). Hráč A vyhraje, pokud hodnota výrazu na tabuli není dělitelná žádným z čísel $11, 12, \ldots, 18$. V opačném případě vyhraje hráč B.

Rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

(*Česká republika*)

Pavel Calábek