Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 větší než původní číslo n. Určete všechna taková n. [59–B–II–4]
2. Zjistěte, kdy pro tři prvočísla p, q, r má následující rozdíl $(p+1)(q+1)(r+1)-$ $- pqr$ hodnotu, jež při dělení šesti dává zbytek 3. [Jedno z prvočísel p, q, r se rovná třem, druhé je tvaru $6k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$, a třetí je libovolné liché prvočíslo. (Úvaha A: Kdyby byl součin pqr sudý, musel by být součin $(p+1)(q+1)(r+1)$ lichý, takže by muselo být $p = q = r = 2$. Úvaha B: Kdyby nebyl součin pqr dělitelný třemi, nebyl by takový ani součin $(p+1)(q+1)(r+1)$, takže čísla p, q, r by dávala při dělení číslem 3 zbytek 1 a uvažovaný rozdíl by tak dával zbytek 2. Z úvah A a B už snadno plyne výše uvedená odpověď.)]
3. Určete, pro které dvojice prvočísel p, q platí
   a) $p + q^2 = q + 145p^2$, [55–C–II–4]
   b) $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]
4. Určete, pro které trojice navzájem různých prvočísel p, q, r platí současně: $p \mid q + r$, $\quad q \mid r + 2p$, $\quad r \mid p + 3q$. [55–A–III–5]
5. Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí: $(p+1)(q+2)(r+3) =$ $= 4pqr$. [60–A–III–2]

2. *Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost*

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq m^2, \quad \text{kde } m = \min\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Big).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Připomeňme nejdříve známé tvrzení o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (stručně nazývanou A-G nerovností): *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

přitom rovnost nastane jedině v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnosti

$$\min\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Big) \geqq 3 \quad \text{a} \quad (x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \geqq 9.$$

[První nerovnost je důsledkem toho, že nerovnost $a+b+c \geqq 3$ platí pro každou trojici kladných čísel a, b, c splňujících podmínku $abc = 1$ (užijte pro takovou trojici A-G nerovnost). Druhou nerovnost dostaneme, když mezi sebou vynásobíme dvě A-G nerovnosti zapsané pro trojice čísel (x, y, z) a $(1/x, 1/y, 1/z)$.]

2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) \geqq 8$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. [55–B–S–1]

3. Důsledkem nerovnosti ze soutěžní úlohy je (slabší) nerovnost

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Podejte její přímý důkaz (pro libovolná $x, y, z > 0$), dříve než začnete řešit soutěžní úlohu. [Roznásobením závorek na levé straně dostaneme výraz $3 + {} + A + B$, kde $A = x/y + y/z + z/x$ a $B = y/x + x/z + z/y$ jsou činitelé z pravé strany. Máme tak dokázat nerovnost $3 + A + B \leqq AB$; v soutěžní úloze jde ovšem o silnější nerovnost $3+A+B \leqq \big(\min(A, B)\big)^2$. Nerovnost $3+A+B \leqq AB$ upravíme do součinového tvaru $(A-1)(B-1) \geqq 4$ a povšimneme si, že podle návodné úlohy 1 platí $A \geqq 3$ a $B \geqq 3$, neboli $A - 1 \geqq 2$ a $B - 1 \geqq 2$. Vynásobením posledních dvou nerovností dostaneme potřebné.]

4. Při řešení soutěžní úlohy je možné (ne-li dokonce nezbytné) uplatnit častý užitečný obrat, kdy určitou nerovnost zdůvodníme sečtením několika (v daném případě tří) analogických nerovností. Využijte to k určení nejmenší hodnoty výrazu

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

kde a, b, c jsou libovolná kladná reálná čísla. [$V_{\min} = 9$ pro $a = b = c = 1$. Podle A-G nerovnosti užité na trojici čísel t^2, $1/t$, $1/t$ pro každé $t \geqq 3$ platí $t^2 + 2/t \geqq 3$. Sečtením takových nerovností pro $t = a$, $t = b$ a $t = c$ dostaneme potřebný odhad $V \geqq 9$.]

5. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left(x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right).$$

[53–A–III–1]

3. *Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí vnitřních úhlů α, β, γ obecného trojúhelníku ABC s vepsanou kružnicí o středu I vyjádřete velikosti úhlů AIB, AIC, BIC. [Velikosti jsou po řadě $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Plyne to ze součtů vnitřních úhlů v jednotlivých trojúhelnících AIB, AIC, BIC, neboť polopřímky AI, BI a CI jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.]

Před řešením následující úlohy si zopakujte učebnicové poznatky o středových, obvodových a úsekových úhlech.

2. Pro obecný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí o středu I dokažte, že polopřímka CI protne oblouk AB kružnice opsané v takovém bodě S, který má od bodů A, B, I stejnou vzdálenost. [Rovnost $|SA| = |SB|$ plyne z rovnosti obvodových úhlů ACS a BCS; rovnost $|SA| = |SI|$ je důsledkem toho, že v trojúhelníku AIS mají oba vnitřní úhly u vrcholů A a I tutéž velikost rovnou $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ neboli $90° - \frac{1}{2}\beta$.]

   Zopakujte si dále učebnicový poznatek o všech sečnách dané kružnice procházejících daným bodem, který je vyjádřen veličinou zvanou *mocnost bodu ke kružnici*. Dobré poučení a řadu ukázek užití najdete v článku T. Nedevová: *Mocnost bodu ke kružnici*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 87 (2012), č. 2, str. 9–17.
3. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]
4. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]
5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
6. V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
   a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.
   b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. [55–A–III–3]
7. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. [60–A–I–3]
8. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

   [62–A–I–5]

4. *Označme $l(n)$ největšího lichého dělitele čísla n. Určete hodnotu součtu*

$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l(2^{2013}).$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete, pro která celá kladná n má číslo $l(n)$ pětkrát méně dělitelů nežli samo číslo n (počítáme všechny kladné dělitele). [Čísla n dělitelná 2^4, ne však 2^5.]
2. Ukažte, že pro každé celé kladné n platí $n + 1 \leqq l(n) + l(n + 1) \leqq \frac{1}{2}(3n + 2)$. [Využijte toho, že pro sudé n platí $1 \leqq l(n) \leqq \frac{1}{2}n$ a $l(n + 1) = n + 1$, zatímco pro liché n je $l(n) = n$ a $1 \leqq l(n + 1) \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$.]
3. Dokažte, že vybereme-li $n + 1$ různých čísel z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, bude některé vybrané číslo dělitelem jiného vybraného čísla. [Hodnota $l(k)$ pro libovolné $k \in \mathsf{M}$ je jedno z n lichých čísel $1, 3, \ldots, 2n-1$, takže platí $l(a) = l(b)$ pro některá dvě z vybraných čísel $a > b$. Podíl $a : b$ je pak mocninou čísla 2.]

5. *Kolika různými způsoby můžeme vydláždit plochu 3×10 dlaždicemi 2×1, lze-li je pokládat v obou navzájem kolmých směrech?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte rekurentní vztah k určování počtů $s(n)$ způsobů zdolání schodiště o n schodech, jsou-li povoleny pouze kroky o jeden, dva nebo tři schody. [$s(n) = s(n - 1) + s(n - 2) + s(n - 3)$ pro každé $n > 3$.]
2. Ukažte, že počty způsobů vydláždění plochy $2 \times n$ dlaždicemi 2×1 pro jednotlivá $n = 1, 2, 3, \ldots$ tvoří proslulou Fibonacciovu posloupnost

   $$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots,$$

   v níž je každý člen (počínaje třetím) roven součtu dvou předchozích členů. [Všechna vydláždění plochy $2 \times n$ pro dané $n \geqq 3$ rozdělte do dvou skupin podle toho, zda pravý okraj dláždění je tvořen jednou svislou, nebo dvěma vodorovnými dlaždicemi. Vysvětlete, proč v každé z obou skupin je právě tolik vydláždění, kolik je všech vydláždění ploch $2 \times (n - 1)$, resp. $2 \times (n - 2)$.]
3. Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

   $$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

   [62–A–I–3]
4. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova“ délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý či lichý počet „slabik“ BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, zatímco slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků. [56–A–I–3]
5. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po

sobě jdoucích písmen A, ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá. [53–A–II–2]

6. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A, ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B. Určete hodnotu výrazu
$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$
[53–A–III–2]

6. *V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Soutěžní úloha se vztahuje k studijnímu tématu tohoto ročníku MO kategorie A, kterým jsou *Apolloniovy kružnice*, neboli kružnice, jež spojujeme s následujícím tvrzením.

Předpokládejme, že v rovině π jsou dány dva různé body A, B a že je rovněž dáno kladné číslo $\lambda \neq 1$. Pak množina
$$\mathsf{M} = \{X \in \pi;\ |AX| : |BX| = \lambda\}$$
je kružnice se středem na přímce AB. Právě tato množina M se nazývá Apolloniovou kružnicí (příslušnou daným bodům A a B a danému poměru λ).

Důkaz uvedeného tvrzení předkládáme níže jako návodnou úlohu 1 (opatřenou řešením). Dodejme ještě, že v případě poměru $\lambda = 1$ je M zřejmě osa úsečky AB. Pro podrobnější seznámení s tématem doporučujeme text na str. 11–14. brožurky L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995.

1. Dokažte výše uvedené tvrzení o množině M bodů v rovině. [Nejprve ukážeme, že pro libovolný bod $X \in \mathsf{M}$, který neleží na přímce AB, platí: *Osy vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu X trojúhelníku ABX protínají přímku AB po řadě v bodech P a Q, které nezávisí na výběru bodu X a které samy patří do množiny* M (jsou to jediné dva body z M, které na přímce AB leží). Skutečně, ze sinové věty pro trojúhelníky APX a BPX plyne $|AP| : |AX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin\varphi$ a $|BP| : |BX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin(180° - \varphi)$, kde $\gamma = |\sphericalangle AXB|$ a $\varphi = |\sphericalangle APX|$, odkud $|AP| : |BP| = |AX| : |BX| = \lambda$. Podobně se odvodí i druhá úměra $|AQ| : |BQ| = \lambda$. Z dokázaného tvrzení o bodech P a Q vyplývá, že každý bod množiny M nutně leží na Thaletově kružnici sestrojené nad (fixním) průměrem PQ. Zbývá ukázat opačné tvrzení o tom, že každý bod X této kružnice patří do množiny M, že tedy splňuje úměru $|AX| : |BX| = \lambda$. K tomu podle předchozího stačí předpokládat, že X neleží na přímce AB, a dokázat rovnost velikostí úhlů $\gamma_1 = |\sphericalangle PXA|$ a $\gamma_2 = |\sphericalangle PXB|$. Provedeme to v případě $\lambda > 1$, kdy uvažované body leží na přímce v pořadí A, P, B, Q (případ $0 < \lambda < 1$ se posoudí analogicky, nebo se prohozením bodů A, B přejde od poměru λ k poměru $1/\lambda$.)

Protože úhly AXQ, BXQ mají po řadě velikosti $90^\circ + \gamma_1$, $90^\circ - \gamma_2$, ze sinové věty plynou rovnosti

$$\lambda = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX| \sin \gamma_1}{|BX| \sin \gamma_2} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AX| \cos \gamma_1}{|BX| \cos \gamma_2},$$

ze kterých vychází $\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_2$, neboli $\gamma_1 = \gamma_2$. Celý důkaz tvrzení o množině M je hotov.]

2. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D neležící na stejné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$. [Koeficient $\lambda = |AB| : |CD|$ kýžené podobnosti známe; proto hledané body X sestrojíme jako průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a poměru λ, druhá bodům B, D a témuž poměru λ.]
3. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na jedné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž jsou úhly AXB, BXC, CXD navzájem shodné. [Hledané body X jsou průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a prochází bodem B (ten tedy určuje příslušný dělící poměr), druhá přísluší bodům B, D a prochází bodem C.]