Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel* 1 *nebo* -1. *Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Do vrcholů pravidelného 63úhelníku vepíšeme libovolným způsobem 32 jednotek a 31 nul, přičemž do každého vrcholu vepíšeme jedno číslo. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší hodnotu, kterou může nabýt tento součet. [Součet je nezáporný, a jelikož jednotek je více než nul, na obvodu budou vedle sebe alespoň dvě jednotky, proto je každý součet alespoň 1 a takového součtu lze dosáhnout pravidelným střídáním čísel 1 a 0 ve vrcholech stran: začneme v libovolném vrcholu jedničkou a skončíme jedničkou v sousedním vrcholu z opačné strany.]
2. Každému vrcholu pravidelného n-úhelníku přiřadíme číslo -1. V jednom kroku je dovoleno změnit dvě sousední čísla na opačná. Zjistěte, pro jaké hodnoty n je možné opakováním kroků dosáhnout, aby byla všechna čísla $+1$? [Pro sudé n to je možné, pro liché n to možné není. Při změně dvou čísel se nezmění zbytek součtu všech čísel při dělení čtyřmi a rozdíl mezi součtem všech čísel v požadované a v počáteční pozici je $2n$.]

D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na začátku, aby po konečném počtu vhodných kroků mohla být na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

D2. V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru otáčení hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem všechny mince postupně přesunout a) na 8 hromádek po 251 minci, b) na 251 hromádek po 8 mincích. [58–A–I–5]

D3. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přendáme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru otáčení hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přeložení dosáhnout, že pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n+1-k$ mincí. [58–A–III–5]

2. *Určete všechny dvojice* (x, y) *reálných čísel, které vyhovují nerovnici*

$$(x+y)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big) \geqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)^2.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechny dvojice (x, y) kladných reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x/y + y/x \leqq 2$. [Po odstranění zlomků upravíme nerovnici na $(x - y)^2 \leqq 0$, která platí jen pro $x = y$.]
2. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x/y + y/x \leqq 2$. [Řešením jsou všechny dvojice (x, y) takové, že $x = y \neq 0$ nebo $xy < 0$.]
3. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x^2 + 4y^2 \leqq 4xy$. [Řešením jsou všechny dvojice (x, y) takové, že $x = 2y$.]
4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost $x^4 + y^4 \geqq x^3y + xy^3$. [Úprava na součin.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [49–A–II–3]

3. *Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou tětivové. [Čtyřúhelníky mají dva protilehlé úhly pravé.]
2. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou deltoidy. [Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC dělí každý čtyřúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.]
3. Dané kružnice k a l se protínají ve dvou bodech B a C. Přímka p se dotýká kružnice k v bodě A. Přímky AB a AC protínají kružnici l postupně v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Dokažte, že přímky p a DE jsou rovnoběžné. [Využijte úsekový úhel při vrcholu A a obvodové úhly při vrcholech C a D nad tětivou BE. Je potřeba důsledně rozebrat všechny různé polohy bodů B, C, D a E na kružnici l.]

D1. Nechť P je bod na straně BC trojúhelníku ABC. Konstruujme postupně tyto body: Q na straně AB tak, aby $|BQ| = |BP|$, R na straně AC tak, aby $|AR| = |AQ|$, P' na straně BC tak, aby $|CP'| = |CR|$, Q' na straně AB tak, aby $|BQ'| = |BP'|$, R' na straně AC tak, aby $|AR'| = |AQ'|$. Dokažte, že $|CP| = |CR'|$, a to, že body P, Q, R, P', Q' a R' leží na jedné kružnici. [Z volby jednotlivých bodů plynou pro střed I kružnice vepsané rovnosti $|IP| = |IQ| = |IR| = |IP'| = |IQ'| = |IR'|$, takže všechny uvedené body leží na kružnici se středem I. A protože CI je osou rovnoramenného trojúhelníku PIR', je i trojúhelník CPR' rovnoramenný, tudíž $|CP| = |CR'|$.]

4. *Dana napsala na papír trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 2. Přehozením prvních dvou číslic vzniklo trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 3. Číslo vzniklé přehozením posledních dvou číslic původního čísla dává při dělení sedmi zbytek 5. Jaký zbytek při dělení sedmi bude mít číslo, které vznikne přehozením první a poslední číslice Danina čísla?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Při dělení číslem 99 je zbytek libovolného trojmístného čísla stejný jako zbytek čísla, které vznikne z původního čísla čtením odzadu. Přesvědčte se! [$(100a + 10b + 10c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$]
2. Dokažte, že čísla $\overline{aba}$ a $\overline{bab}$ dávají stejný zbytek při dělení sedmi. (Výraz $\overline{klm}$ označuje zápis trojmístného čísla s číslicemi k, l, m v desítkové soustavě.) [$\overline{aba} - \overline{bab} = (101a + 10b) - (101b + 10a) = 7 \cdot 13(a - b)$]
3. Jisté čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Pokud zapíšeme jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší čtyřmístné číslo, které je také dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo. [58–A–II–1]

D1. Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, které začínalo stejnou číslicí jako původní číslo, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat? [57–C–I–6]

D2. Janko má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, které lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách? [61–C–II–2]

D3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ (v desítkové soustavě), pro která platí rovnost

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

[49–A–III–6]

5. *V rovině jsou dány body A, T, U tak, že úhel ATU je tupý. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém T, U jsou po řadě body dotyku strany BC s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany BC dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.)*

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si učebnicové poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic a jejím užití při konstrukci společných tečen.

1. Do pásu určeného dvěma rovnoběžkami $p \parallel q$, $p \neq q$, vepišme kružnici tak, že se dotýká obou přímek. Dokažte, že poloměr kružnice je polovinou vzdálenosti přímek p a q. [Průměr kružnice, který je kolmý na přímku p, ma délku rovnou vzdálenosti rovnoběžek p a q.]
2. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že bod A, střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané a střed kružnice připsané ke straně BC leží v přímce. [Ta přímka je osou úhlu BAC.]
3. Na úsečce AB sestrojte bod X tak, aby platilo $|AX| : |BX| = p$, kde $p > 0$ je dané číslo. [Na kolmici k přímce AB bodem A sestrojte bod C tak, aby $|AC| = p$, a na kolmici k přímce AB bodem B sestrojte bod D tak, aby $|BD| = 1$,

přičemž body C a D leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Bod X je průsečík AB a CD.]

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$. Dokažte, že průsečík P jeho úhlopříček AC a BD leží na spojnici středů stran AB a CD. [Průsečík úhlopříček je střed stejnolehlosti obou základen, takže jejich středy si musejí odpovídat.]

D2. Označme r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Její tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku z něj vytínají tři menší podobné trojúhelníky, poloměry jim vepsaných kružnic označíme r_a, r_b a r_c. Dokažte rovnost $r_a + r_b + r_c = r$. [Tibor Fonód, Milan Maxian: *Geometrické perličky*, úloha 3.10. Při vhodném označení poloměrů bude příslušný poměr podobnosti $r_a/r = (v_a - 2r)/v_a$, kde v_a značí velikost výšky trojúhelníku ABC na stranu a, a podobně pro strany b a c. Požadovanou rovnost pak dostaneme z následujících rovností pro obsah S trojúhelníku ABC: $2S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c = r(a + b + c)$.]

6. *Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 lze rozlomit na čtyři části délky nejvýše r tak, aby ze žádných tří těchto částí nešlo složit trojúhelník.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 je možné rozlomit na tři části délky nejvýše r tak, aby se z nich nedal složit trojúhelník. [$r = 1/2$, nejdelší část musí být alespoň polovina celé délky]
2. Dokažte, že v libovolném čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z hran, které z něj vycházejí, je možno sestrojit trojúhelník. [Nechť nejdelší hrana v čtyřstěnu $ABCD$ je AB. Pokud se z hran u vrcholu A nedá sestrojit trojúhelník, tak $|AC| + |AD| \leqq |AB|$. Z trojúhelníkových nerovností $|AC| + |BC| > |AB|$ a $|AD| + |BD| > |AB|$ dostaneme, že z hran vycházejících z vrcholu B trojúhelník sestrojit lze, protože $|BC| + |BD| > 2|AB| - |AC| - |AD| \geqq |AB|$.]

D1. Na zapomenuté tabuli v Rosťově ještě zapomenutější tmavé komnatě je nakreslených pět už skoro zapomenutých úseček. Z každé trojice z těchto úseček umíme složit trojúhelník. Dokažte, že umíme vybrat tři úsečky tak, že trojúhelník, který z nich vznikne, je ostroúhlý. [KMS 2008/2009, 3. zimní série, úloha 8]

D2. Vyřešte zadanou úlohu pro lámání tyče na pět (a případně více) částí. [Zobecněním úvahy v druhém řešení dostaneme pro pět částí hodnotu $r = 5/12$ a lámání na n částí vede na vzorec $r = \frac{F_n}{F_1 + \ldots + F_n}$, kde F_n je n-té Fibonacciho číslo.]