Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabýt výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, splňují-li reálná čísla a, b, c dvojici podmínek*

$$a + 3b + c = 6,$$
$$-a + b - c = 2.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete nejmenší hodnotu výrazu $V = 5 + (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pro která x ji výraz nabývá?
2. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 6$. Pro které hodnoty a, b je W minimální? [$W = (a-3)^2 \geqq 0$]
3. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 6$. Pro které hodnoty a, b je Y minimální? [$Y = 3 + W \geqq 3$]
4. Určete největší možnou hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 8$. Pro které hodnoty a, b je K maximální? [$K = 5 + 8a - a^2 = -(a-4)^2 + 21 \leqq 21$, $a = b = 4$]
5. Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0$. [C–54–I–1]
6. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$? [C–62–I–2]

2. *V rovině jsou dány body A, P, T neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby P byla pata jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány body dotyku jeho stran s kružnicí mu vepsanou.
2. V trojúhelníku ABC označme po řadě P, Q, R paty výšek z vrcholů A, B, C. Dále postupně označme T, U, V body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
   a) A, C, V,
   b) A, U, R,
   c) A, P, Q,
   d) A, B, R.
   [V a) i b) umíme sestrojit vepsanou kružnici; v c) sestrojíme AB jako průměr kružnice určené danými body. Úloha d) nemá řešení, pokud R neleží na přímce AB. Jestliže R leží na přímce AB, má úloha nekonečně mnoho řešení.]

3. *Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněno, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n.*

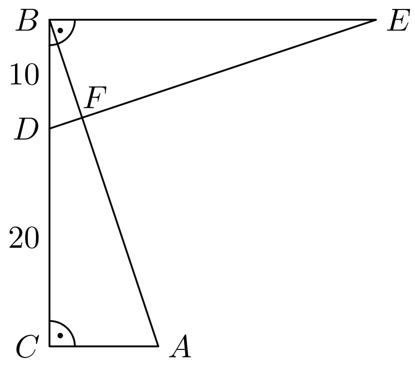
Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechna prvočísla p, q, pro něž platí $p + q = 14$.
2. Číslo n je součinem dvou různých prvočísel. Zvětšíme-li menší z nich o 1 a druhé ponecháme, jejich součin se zvětší o 7. Určete číslo n. [Výsledek: $n \in \{14, 21, 35\}$.]
3. Číslo n je součinem dvou prvočísel. Zvětšíme-li jedno z nich o 1 a druhé o 1 zmenšíme, jejich součin zůstane stejný. Určete číslo n. [Výsledek: $n = 6$.]
4. Číslo n je součinem dvou prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, jejich součin se zvětší o 35. Určete číslo n. [Výsledek: $n \in \{93, 145, 253, 289\}$.]

4. *Ve čtverci $ABCD$ označme K střed strany AB a L střed strany AD. Úsečky KD a LC se protínají v bodě M a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtěte jejich obsahy, jestliže úsečka LM má délku 1 cm.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 1 a platí $|BD| = 10\,\text{cm}$, $|CD| = 20\,\text{cm}$.



Obr. 1

   a) Určete délky stran trojúhelníku ABC. [10, 30, $10\sqrt{10}$]
   b) Dokažte, že trojúhelníky DBF, ABC a BEF jsou navzájem podobné.
   c) Určete délky stran trojúhelníků DBF a BEF. [10, $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$; 30, $9\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$]
   d) Určete obsahy trojúhelníků ABC, DBF a BEF. [150, 15, 135]
   e) Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [135]
2. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 1. Trojúhelník BEF má obsah $30\,\text{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [30]
3. Dokažte věty:
   a) Mají-li dva trojúhelníky stejnou výšku, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru délek příslušných základen.
   b) Mají-li dva trojúhelníky shodné základny, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru příslušných výšek.
4. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC je $|AB| = 12\,\text{cm}$. Označme K střed strany AB a L takový bod strany BC, pro nějž platí $|CL| : |LB| = 1 : 2$. Určete obsahy útvarů, které vzniknou rozřezáním

trojúhelníku ABC podél úseček KC a AL. [Nakreslete si obrázek, označte M průsečík úseček KC a AL, dokreslete úsečku BM a pomocí vět z předchozí úlohy spočítejte nejprve obsahy všech pěti trojúhelníků, které mají společný vrchol M.]

5. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojúhelníku FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [C–57–S–2]

5. *Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.
2. Dokažte, že pro každé liché číslo n je číslo $n^2 - 1$ dělitelné osmi.
3. Dokažte, že pro všechna celá kladná čísla n je rozdíl $n^6 - n^2$ dělitelný šedesáti.
4. Určete všechna kladná celá čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. [C–55–I–1]
5. Určete všechna celá čísla n, pro něž je $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ prvočíslo. [C–62–I–5]

6. *Šachového turnaje se zúčastnilo 8 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů. Hráč, který skončil na 2. místě, získal stejný počet bodů jako poslední čtyři dohromady. Určete výsledek partie mezi 4. a 6. hráčem v celkovém pořadí.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Šachového turnaje, ve kterém každý s každým odehrál jednu partii, se zúčastnilo n hráčů. Kolik partií bylo celkem odehráno? Kolik získali všichni dohromady bodů, jestliže za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný bod? [$\frac{1}{2}n(n-1)$]
2. Šachového turnaje se podle pravidel z předchozí úlohy zúčastnili 4 hráči. Vítěz turnaje získal stejný počet bodů jako zbývající tři hráči dohromady.
   a) Jaký největší a jaký nejmenší počet bodů mohl mít? [Získal právě 3 body.]
   b) Kolik partií mohlo skončit remízou, jestliže na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů? [Buď 0, nebo 1, nebo 2.]
3. Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelených v turnaji, přitom v žádných dvou utkáních jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek? [C–55–S–1]
4. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz? [C–58–I–1]