63. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n.*

Řešení. Hledáme $n = p \cdot q \cdot r$ s prvočísly $p \leqq q \leqq r$, která splňují rovnost

$$(p+1)(q+1)(r+1) = pqr + 963. \tag{1}$$

Její pravá strana je v případě nejmenšího prvočísla $p = 2$ liché číslo, takže tehdy i činitelé $q+1$ a $r+1$ ze součinu na levé straně musejí být lichá čísla. Pro prvočísla q, r to pak znamená, že $q = r = 2$, avšak trojice $p = q = r = 2$ rovnosti (1) nevyhovuje. Platí tedy $p \geqq 3$.

Ukážeme nyní, že nutně platí $p = 3$. V opačném případě jsou všechna tři prvočísla p, q, r větší než 3, a proto ani součin pqr, a tedy ani pravá strana (1) nejsou čísla dělitelná třemi (číslo 963 je totiž násobkem tří). Z podmínky, že součin $(p+1)(q+1)(r+1)$ z levé strany (1) není dělitelný třemi, ovšem plyne, že žádné z prvočísel p, q, r nemůže dávat při dělení třemi zbytek 2. A protože zbytek 0 je v uvažovaném případě vyloučen, mohou prvočísla p, q, r dávat při dělení třemi jedině zbytek 1. Odtud dále dostáváme, že rozdíl $(p+1)(q+1)(r+1)-pqr$ dává při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $2\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot1 = 7$, tedy zbytek 2. To je ovšem spor, neboť podle (1) platí $(p+1)(q+1)(r+1)-pqr = 963$. Rovnost $p = 3$ je tak dokázána.

Po dosazení $p = 3$ do (1) dostaneme rovnost $4(q+1)(r+1) = 3qr + 963$, kterou postupně upravíme do „součinového“ tvaru:

$$\begin{aligned} 4qr + 4q + 4r + 4 &= 3qr + 963, \\ qr + 4q + 4r &= 959, \\ (q+4)(r+4) &= 975. \end{aligned}$$

Číslo 975 má prvočíselný rozklad $975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$, takže s ohledem na nerovnosti $3 \leqq q \leqq r$ neboli $7 \leqq q+4 \leqq r+4$ pro menší činitel z odvozeného rozkladu musí platit $q+4 \leqq \sqrt{975} < 32$, proto $q+4 \in \{13, 15, 25\}$. To splňuje jediné prvočíslo $q = 11$, pro něž $q+4 = 15$. Pro druhý činitel tak máme $r+4 = 5\cdot13 = 65$, odkud $r = 61$, což je skutečně prvočíslo. Hledané číslo $n = p\cdot q\cdot r$ je tedy jediné a má hodnotu

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2\,013.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 větší než původní číslo n. Určete všechna taková n. [59–B–II–4]
2. Zjistěte, kdy pro tři prvočísla p, q, r má následující rozdíl $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr$ hodnotu, jež při dělení šesti dává zbytek 3. [Jedno z prvočísel p, q, r se rovná třem, druhé je tvaru $6k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$, a třetí je libovolné liché prvočíslo. (Úvaha A: Kdyby byl součin pqr sudý, musel by být součin $(p+1)(q+1)(r+1)$ lichý, takže by muselo být $p = q = r = 2$. Úvaha B: Kdyby nebyl součin pqr dělitelný třemi, nebyl by takový ani součin $(p+1)(q+1)(r+1)$, takže čísla p, q, r by dávala při dělení číslem 3 zbytek 1

a uvažovaný rozdíl by tak dával zbytek 2. Z úvah A a B už snadno plyne výše uvedená odpověď.)]

3. Určete, pro které dvojice prvočísel p, q platí
   a) $p + q^2 = q + 145p^2$, [55–C–II–4]
   b) $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]
4. Určete, pro které trojice navzájem různých prvočísel p, q, r platí současně: $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$, $r \mid p + 3q$. [55–A–III–5]
5. Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí: $(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr$. [60–A–III–2]

2. *Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost*

$$(x + y + z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \leqq m^2, \quad \text{kde } m = \min\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\Big).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

Řešení. Protože v dokazované nerovnosti vystupuje minimum ze dvou kladných čísel a funkce $y = x^2$ je na množině kladných čísel rostoucí, je naším úkolem ověřit dvojici nerovností

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)^2 \text{ a } (x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\Big)^2 \quad (1)$$

a zjistit, kdy v *alespoň jedné* z nich nastane rovnost (právě tehdy totiž nastane rovnost také v původní nerovnosti). Druhou nerovnost v (1) ovšem zřejmě dostaneme z první, když trojici (x, y, z) zaměníme trojicí (y, x, z). Stačí proto ověřit, že pro libovolnou trojici (x, y, z) kladných čísel platí první nerovnost

$$(x + y + z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\Big)^2,$$

a zjistit, kdy v ní nastane rovnost. Po roznásobení obou stran dostaneme

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leqq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\Big(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\Big).$$

Takovou nerovnost bude zřejmě výhodné zapsat v nových (opět kladných) proměnných $a = x/y$, $b = y/z$, $c = z/x$. Obdržíme tak ekvivalentní nerovnost

$$3 + a + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + b + c + \frac{1}{b} \leqq a^2 + b^2 + c^2 + 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big),$$

kterou ještě upravíme na tvar se součtem tří hodnot téhož výrazu

$$\Big(a^2 - 1 - a + \frac{1}{a}\Big) + \Big(b^2 - 1 - b + \frac{1}{b}\Big) + \Big(c^2 - 1 - c + \frac{1}{c}\Big) \geqq 0. \quad (2)$$

Díky tomu, že a, b, c jsou kladná čísla a že dotyčný výraz má vyjádření

$$t^2 - 1 - t + \frac{1}{t} = (t^2 - 1) - \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{(t^2 - 1)(t - 1)}{t} = \frac{(t - 1)^2(t + 1)}{t},$$

upravená nerovnost (2) platí a rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c = 1$, což pro původní proměnné x, y, z znamená právě to, že $x = y = z$. Tato podmínka je ovšem stejná i pro rovnost v druhé nerovnosti (1) (chceme-li být důslední, má tvar $y = x = z$). Proto i rovnost v původní dokazované nerovnosti nastane jedině v případě, kdy $x = y = z$.

Dodejme, že k důkazu (1) jsme vlastně ani nevyužili vztah $abc = 1$, které nově zavedené proměnné a, b, c splňují.

Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme nejdříve známé tvrzení o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (stručně nazývanou A-G nerovností): *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

přitom rovnost nastane jedině v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnosti

$$\min\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\Big) \geqq 3 \quad \text{a} \quad (x+y+z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \geqq 9.$$

[První nerovnost je důsledkem toho, že nerovnost $a + b + c \geqq 3$ platí pro každou trojici kladných čísel a, b, c splňujících podmínku $abc = 1$ (užijte pro takovou trojici A-G nerovnost). Druhou nerovnost dostaneme, když mezi sebou vynásobíme dvě A-G nerovnosti zapsané pro trojice čísel (x, y, z) a $(1/x, 1/y, 1/z)$.]

2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte

$$\Big(x + \frac{1}{y}\Big)\Big(y + \frac{1}{z}\Big)\Big(z + \frac{1}{x}\Big) \geqq 8$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. [55–B–S–1]

3. Důsledkem nerovnosti ze soutěžní úlohy je (slabší) nerovnost

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\Big)\Big(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\Big).$$

Podejte její přímý důkaz (pro libovolná $x, y, z > 0$), dříve než začnete řešit soutěžní úlohu. [Roznásobením závorek na levé straně dostaneme výraz $3 + A + B$, kde $A = x/y + y/z + z/x$ a $B = y/x + x/z + z/y$ jsou činitelé z pravé strany. Máme tak dokázat nerovnost $3 + A + B \leqq AB$; v soutěžní úloze jde ovšem o silnější nerovnost $3 + A + B \leqq (\min(A, B))^2$. Nerovnost $3 + A + B \leqq AB$ upravíme do součinového tvaru $(A-1)(B-1) \geqq 4$ a povšimneme si, že podle návodné úlohy 1 platí $A \geqq 3$ a $B \geqq 3$, neboli $A - 1 \geqq 2$ a $B - 1 \geqq 2$. Vynásobením posledních dvou nerovností dostaneme potřebné.]

4. Při řešení soutěžní úlohy je možné (ne-li dokonce nezbytné) uplatnit častý užitečný obrat, kdy určitou nerovnost zdůvodníme sečtením několika (v daném případě tří) analogických nerovností. Využijte to k určení nejmenší hodnoty výrazu

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big),$$

kde a, b, c jsou libovolná kladná reálná čísla. [$V_{\min} = 9$ pro $a = b = c = 1$. Podle A-G nerovnosti užité na trojici čísel t^2, $1/t$, $1/t$ pro každé $t \geqq 3$ platí $t^2 + 2/t \geqq 3$. Sečtením takových nerovností pro $t = a$, $t = b$ a $t = c$ dostaneme potřebný odhad $V \geqq 9$.]

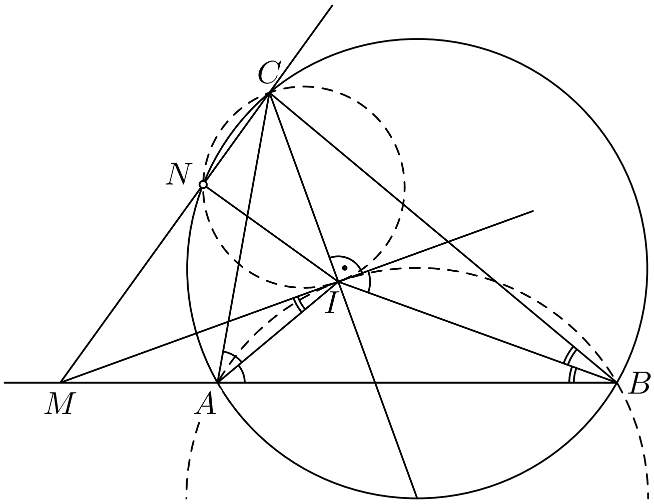
5. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\Big(x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\Big).$$

[53–A–III–1]

3. *Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Ukážeme nejdříve dvěma způsoby, že přímka MI, tedy kolmice na přímku CI v bodě I, je tečnou ke kružnici ABI (tak budeme značit kružnice procházející třemi danými body). První postup založíme na známém poznatku, že AIC a BIC jsou tupé úhly velikostí $90° + \frac{1}{2}\beta$, resp. $90° + \frac{1}{2}\alpha$ (návodná úloha 1). Proto zkoumaná kolmice MI k přímce CI svírá s úsečkami AI a BI ostré úhly $\frac{1}{2}\beta$, resp. $\frac{1}{2}\alpha$,[1] tedy úhly shodné s obvodovými úhly IBA, resp. IAB v kružnici ABI (obr. 1). To již podle věty o shodnosti obvodových a úsekových úhlů znamená právě to, že přímka MI je tečnou kružnice ABI. Stejný závěr plyne ovšem okamžitě z poznatku, že středem kružnice ABI je střed toho oblouku AB kružnice ABC, který neobsahuje vrchol C a kterým prochází přímka CI (osa vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC, návodná úloha 2).



Obr. 1

Z dokázaného dotyku přímky MI s kružnicí ABI vyplývá, že bod M leží na přímce AB vně úsečky AB a má ke kružnici ABI kladnou mocnost m, jež má dvojí vyjádření $m = |MI|^2 = |MA| \cdot |MB|$. Bod M tudíž leží i ve vnější oblasti kružnice ABC (neboť úsečka AB je její tětiva) a má k ní tutéž mocnost $m = |MA| \cdot |MB|$. Tatáž hodnota $m = |MI|^2$ je však menší než $|MC|^2$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníku CMI. Nerovnost $|MC|^2 > m$ tak znamená, že polopřímka MC má s kružnicí ABC kromě bodu C společný ještě jeden bod N, který navíc leží mezi body M a C (neboť z rovnosti $|MC| \cdot |MN| = m$ plyne nerovnost $|MN| < |MC|$). První část tvrzení úlohy je tak dokázána.

Naším druhým úkolem je ukázat, že úhel CNI je pravý. K tomu na dokázanou rovnost $|MC| \cdot |MN| = |MI|^2$ můžeme uplatnit následující „obrácení“ Eukleidovy věty o odvěsně MI pravoúhlého trojúhelníku CMI. Pata jeho výšky z vrcholu I na přeponu CM je takový bod X úsečky CM, jehož poloha je (díky Eukleidově větě) jednoznačně určena rovností $|MC| \cdot |MX| = |MI|^2$. Je proto $X = N$ a důkaz je hotov. Bez užití Eukleidovy věty lze argumentovat takto: Protože přímka MI se v bodě I dotýká Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem CI, má bod M i k této kružnici mocnost $m = |MI|^2$, a proto na ní — díky rovnosti $m = |MC| \cdot |MN|$ — leží i bod N, takže úhel CNI je podle Thaletovy věty skutečně pravý.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí vnitřních úhlů α, β, γ obecného trojúhelníku ABC s vepsanou kružnicí o středu I vyjádřete velikosti úhlů AIB, AIC, BIC. [Velikosti jsou po řadě $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Plyne to ze součtů vnitřních úhlů v jednotlivých trojúhelnících

[1] Z určených úhlů mezi přímkou MI a úsečkami AI a BI plyne, že bod M (jehož existence se v zadání úlohy předpokládá) skutečně existuje, právě když platí $\frac{1}{2}\alpha \neq \frac{1}{2}\beta$ neboli $\alpha \neq \beta$. S ohledem na symetrii zadání můžeme předpokládat, že platí $\alpha > \beta$; bod M pak leží — jako na našem obrázku — na prodloužení strany AB za vrchol A a je $|\sphericalangle IMA| = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$.

AIB, AIC, BIC, neboť polopřímky AI, BI a CI jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.]

Před řešením následující úlohy si zopakujte učebnicové poznatky o středových, obvodových a úsekových úhlech.

2. Pro obecný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí o středu I dokažte, že polopřímka CI protne oblouk AB kružnice opsané v takovém bodě S, který má od bodů A, B, I stejnou vzdálenost. [Rovnost $|SA| = |SB|$ plyne z rovnosti obvodových úhlů ACS a BCS; rovnost $|SA| = |SI|$ je důsledkem toho, že v trojúhelníku AIS mají oba vnitřní úhly u vrcholů A a I tutéž velikost rovnou $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ neboli $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$.]

   Zopakujte si dále učebnicový poznatek o všech sečnách dané kružnice procházejících daným bodem, který je vyjádřen veličinou zvanou *mocnost bodu ke kružnici.* Dobré poučení a řadu ukázek užití najdete v článku T. Nedevová: *Mocnost bodu ke kružnici*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 87 (2012), č. 2, str. 9–17.
3. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]
4. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]
5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
6. V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
   a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.
   b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. [55–A–III–3]
7. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. [60–A–I–3]
8. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí
$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$
   [62–A–I–5]

4. *Označme $l(n)$ největšího lichého dělitele čísla n. Určete hodnotu součtu*
$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l\bigl(2^{2013}\bigr).$$

Řešení. Je zřejmé, že pro každé přirozené číslo k platí rovnosti $l(2k) = l(k)$ a $l(2k-1) = 2k-1$. Díky jim lze hodnoty $l(n)$ sčítat po skupinách čísel n ležících vždy mezi dvěma sousedními mocninami čísla 2, přesněji určovat součty
$$s(n) = l\bigl(2^{n-1}+1\bigr) + l\bigl(2^{n-1}+2\bigr) + l\bigl(2^{n-1}+3\bigr) + \ldots + l\bigl(2^n\bigr)$$
postupně pro jednotlivá $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pro názornost nejprve uveďme postup určení konkrétního součtu
$$s(4) = l(9) + l(10) + l(11) + l(12) + l(13) + l(14) + l(15) + l(16).$$

Vklad jeho sčítanců $l(2k-1)$ je roven

$$l(9)+l(11)+l(13)+l(15)=9+11+13+15=\frac{4}{2}\cdot(9+15)=48$$

(naznačili jsme užití vzorce pro součet několika členů aritmetické posloupnosti), zatímco vklad sčítanců $l(2k)$ má hodnotu

$$l(10)+l(12)+l(14)+l(16)=l(5)+l(6)+l(7)+l(8).$$

To je však „předchozí“ součet $s(3)$, který jsme už dříve mohli určit ze součtu $s(1)=1$ podobným, nyní stručněji zapsaným postupem:

$$s(3)=l(5)+l(6)+l(7)+l(8)=5+7+s(2)=12+3+s(1)=15+1=16.$$

Teď už snadno dopočítáme $s(4)=48+s(3)=64$.

Provedený výpočet nás přivádí k hypotéze, že pro každé n platí $s(n)=4^{n-1}$. Dokážeme ji matematickou indukcí. Platí-li $s(n)=4^{n-1}$ pro určité n (jak je tomu pro $n=1,2,3$), pak pro součet $s(n+1)$ podle našeho postupu dostaneme

$$\begin{aligned}s(n+1)&=l\bigl(2^n+1\bigr)+l\bigl(2^n+2\bigr)+l\bigl(2^{n-1}+3\bigr)+\ldots+l\bigl(2^{n+1}\bigr)=\\&=\bigl[(2^n+1\bigr)+(2^{n-1}+3\bigr)+\ldots+\bigl(2^{n+1}-1\bigr)\bigr]+s(n)=\\&=\frac{2^{n-1}}{2}\bigl(2^n+1+2^{n+1}-1\bigr)+4^{n-1}=2^{n-2}\cdot3\cdot2^n+4^{n-1}=4^n.\end{aligned}$$

(Využili jsme toho, že počet lichých čísel od 2^n+1 do $2^{n+1}-1$ včetně je roven 2^{n-1}.) Důkaz indukcí je hotov.

Podle dokázaného vzorce $s(n)=4^{n-1}$ pro součet ze zadání úlohy platí

$$\begin{aligned}l(1)+l(2)+l(3)+\ldots+l\bigl(2^{2013}\bigr)&=l(1)+s(2)+s(3)+\ldots+s(2\,013)=\\&=1+1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{2012}=1+\frac{4^{2013}-1}{3}=\frac{4^{2013}+2}{3}.\end{aligned}$$

Poznámka. Za pozornost jistě stojí, že vzorec $s(n)=4^{n-1}$ z podaného řešení je speciálním případem docela překvapivého vztahu

$$l(k+1)+l(k+2)+l(k+3)+\ldots+l(2k)=k^2, \tag{1}$$

který lze pro každé přirozené číslo k dokázat bez užití indukce následující elegantní úvahou: Všech k sčítanců na levé straně (1) jsou zřejmě čísla z k-prvkové množiny $\{1,3,5,\ldots,2k-1\}$ a jsou po dvou různá, neboť podíl žádných dvou čísel z množiny příslušných argumentů $\{k+1,k+2,\ldots,2k\}$ není mocninou čísla 2. Proto je (až na pořadí sčítanců) na levé straně (1) součet $1+3+5+\ldots+(2k-1)$, který má skutečně hodnotu k^2.

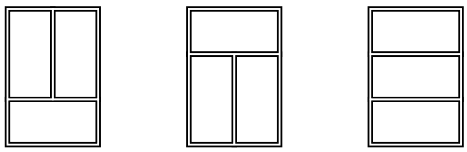
Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete, pro která celá kladná n má číslo $l(n)$ pětkrát méně dělitelů nežli samo číslo n (počítáme všechny kladné dělitele). [Čísla n dělitelná 2^4, ne však 2^5.]
2. Ukažte, že pro každé celé kladné n platí $n+1\leqq l(n)+l(n+1)\leqq\frac12(3n+2)$. [Využijte toho, že pro sudé n platí $1\leqq l(n)\leqq\frac12 n$ a $l(n+1)=n+1$, zatímco pro liché n je $l(n)=n$ a $1\leqq l(n+1)\leqq\frac12(n+1)$.]
3. Dokažte, že vybereme-li $n+1$ různých čísel z množiny $\mathsf{M}=\{1,2,\ldots,2n\}$, bude některé vybrané číslo dělitelem jiného vybraného čísla. [Hodnota $l(k)$ pro libovolné $k\in\mathsf{M}$ je jedno z n lichých čísel $1,3,\ldots,2n-1$, takže platí $l(a)=l(b)$ pro některá dvě z vybraných čísel $a>b$. Podíl $a:b$ je pak mocninou čísla 2.]

5. *Kolika různými způsoby můžeme vydláždit plochu* 3×10 *dlaždicemi* 2×1*, lze-li je pokládat v obou navzájem kolmých směrech?*

Řešení. Namísto plochy 3×10 uvážíme obecnou plochu $3 \times 2n$, kde n je přirozené číslo, a označíme jako a_n počet všech způsobů vydláždění této plochy dlaždicemi 2×1 (kterých potřebujeme $3n$ kusů).[2] I když je naší úlohou najít z čísel a_n pouze jediné, totiž číslo a_5, není zamýšlené zobecnění samoúčelné. Ukáže se totiž, že každou jednotlivou hodnotu a_n bude možné vypočítat podle jednoduchého vzorce, budeme-li znát dvě předchozí hodnoty a_{n-1} a a_{n-2}.[3] Tak lze z „počátečních“ hodnot a_1, a_2 vypočítat nejprve a_3, pak a_4 atd. až po kýžené a_n. Takovému postupu (běžnému v řadě kombinatorických situací, viz návodné úlohy) říkáme *rekurentní metoda* nebo též *procedura rekurse.*

Zatímco hodnotu $a_1 = 3$ je snadné určit nakreslením všech možných vydláždění plochy 3×2 (obr. 2), podobný postup k určení hodnoty $a_2 = 11$ by byl dosti pracný. Místo toho ještě zavedeme i pro naše další rekurentní úvahy vhodná čísla b_n: každé číslo b_n bude označovat počet všech způsobů neúplného vydláždění plochy $3 \times (2n-1)$ dlaždicemi 2×1 v počtu $3n-2$ kusů, při kterém zbude jedno nepokryté pole 1×1 v *konkrétně zvoleném* rohu celé plochy, řekněme vpravo dole. Díky osové souměrnosti vyjde stejný počet b_n způsobů i za požadavku, aby nepokryté pole zůstalo v pravém horním rohu.

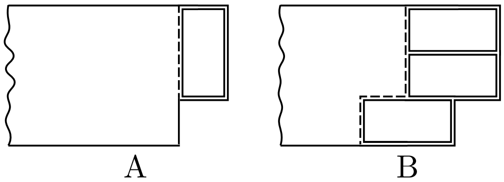


Obr. 2

K hodnotě $a_1 = 3$ připojme zřejmou hodnotu $b_1 = 1$ a přejděme k vlastní rekurentní metodě. Odvodíme při ní, že pro každé celé $n > 1$ platí rovnosti

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{a} \quad a_n = a_{n-1} + 2b_n. \tag{1}$$

První rovnost z (1) dokážeme tak, že všechna vydláždění plochy $3 \times (2n-1)$ s „odťatým“ rohem 1×1 vpravo dole rozdělíme do dvou disjunktních skupin podle toho, zda je pravý horní roh 1×1 pokryt svislou dlaždicí (vydláždění typu A na obr. 3), nebo vodorovnou dlaždicí (vydláždění typu B, při kterém je vynucena poloha dalších dvou, celkem tedy tří vodorovných dlaždic, nakreslených na obr. 3). Počet vydláždění typu A je zřejmě roven počtu vydláždění zbývající plochy $3 \times (2n-2)$, tedy číslu a_{n-1}. Podobně počet vydláždění typu B je roven počtu vydláždění plochy $3 \times (2n-3)$ s odťatým pravým dolním rohem 1×1, tedy číslu b_{n-1}. Tím je první rovnost z (1) dokázána.

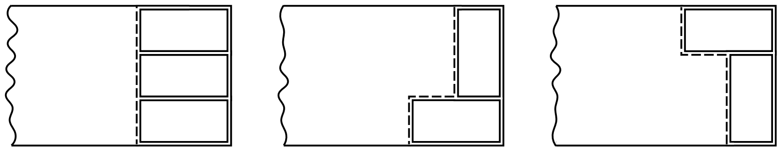


Obr. 3

[2] Je jistě zřejmé, proč uvažujeme pouze plochy $3 \times k$ se sudým parametrem k.

[3] Zmíněný jednoduchý vzorec najdete pod číslem (2) až v poznámce za ukončeným řešením. V něm totiž budeme počítat rekurentně čísla a_n současně s jistými vhodnými čísly b_n, bez nichž by výklad naší rekurentní metody byl méně přehledný.

Druhou rovnost z (1) ověříme obdobně se stručnějším komentářem: všechna vydláždění plochy $3 \times 2n$ rozdělíme do tří disjunktních skupin — vydláždění typů C, D a E znázorněných na obr. 4. Všech vydláždění typu C je zřejmě a_{n-1}, zatímco počty vydláždění typů D a E se rovnají témuž číslu b_n (to jsme zdůraznili již dříve). Tím je i důkaz druhé rovnosti z (1) hotov.



Obr. 4

Máme vše připraveno k výpočtu hledaného čísla a_5. Z hodnot $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ a rovností (1) postupně dostaneme

$$b_2 = a_1 + b_1 = 4,\ a_2 = a_1 + 2b_2 = 11,\ b_3 = a_2 + b_2 = 15,\ a_3 = a_2 + 2b_3 = 41,$$
$$b_4 = a_3 + b_3 = 56,\ a_4 = a_3 + 2b_4 = 153,\ b_5 = a_4 + b_4 = 209,\ a_5 = a_4 + 2b_5 = 571.$$

Odpověď. Hledaný počet způsobů vydláždění plochy 3×10 je roven 571.

Poznámka 1. Jak jsme slíbili v úvodu řešení, ukážeme nyní, že zkoumané počty a_n všech vydláždění plochy $3 \times 2n$ dlaždicemi 2×1 vyhovují rekurentní rovnici

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad \text{pro každé } n \geqq 1, \tag{2}$$

takže je lze počítat „samostatně“, tedy bez současného výpočtu čísel b_n, kterými jsme si vypomohli v podaném řešení. Odvození (2) provedeme algebraicky, totiž vyloučením čísel b_n ze vztahů (1). Podle nich platí

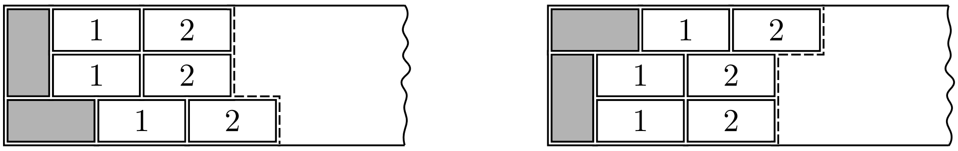
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + 2b_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_{n+1} + b_{n+1}) = \\ &= 3a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

Dodejme ještě, že ze základů diskrétní matematiky je známo, že každá posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jež vyhovuje (2), má vyjádření $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, kde $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ jsou kořeny kvadratické rovnice $\lambda^2 = 4\lambda - 1$ a $C_{1,2}$ jsou libovolné konstanty. Ty lze pro naši situaci určit z hodnot $a_1 = 3$ a $a_2 = 11$ a dospět tak ke konečnému vzorci pro počet a_n všech vydláždění plochy $3 \times 2n$ s obecným n ve tvaru

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Jiné řešení. Popíšeme ještě jednu rekurentní metodu k určování počtů a_n všech způsobů vydláždění plochy $3 \times 2n$ dlaždicemi 2×1. Bude nás tentokrát zajímat, zda takové vydláždění je „slepeno“ z vydláždění dvou ploch $3 \times k$ a $3 \times (2n - k)$ pro vhodné $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, jež musí být zřejmě sudé. Obě plochy vzniknou z původní plochy $3 \times 2n$ jedním přímým řezem délky 3; ptáme se tedy, zda při některém takovém řezu žádnou uloženou dlaždici nerozpůlíme. Pokud se tak nestane, tedy pokud při každém takovém řezu aspoň jednu dlaždici rozpůlíme, řekneme, že původní vydláždění plochy $3 \times 2n$ je *celistvé.*

Je zřejmé, že každé ze tří vydláždění plochy 3×2 je celistvé (obr. 2). Vysvětlíme, proč při každém $n \geqq 2$ existují právě dvě celistvá vydláždění plochy $3 \times 2n$. Při jejím levém okraji musejí být umístěny dlaždice jedním ze dvou způsobů zakreslených na obr. 5. Pokrytí prvního sloupce 3×1 totiž nemůže být zajištěno třemi vodorovnými dlaždicemi, nýbrž jednou svislou a jednou vodorovnou dlaždicí, které jsou v obou možných situacích vybarveny šedě. Tyto dvě dlaždice vynucují vodorovné umístění dalších tří dlaždic s vepsanou číslicí 1 (jinak by zkoumané vydláždění nebylo celistvé, bylo by totiž slepeno z vydláždění ploch 3×2 a $3 \times (2n-2)$). Je-li $n = 2$, jsme s celým rozborem hotovi; v případě $n \geqq 3$ je ovšem vynuceno vodorovné umístění dalších tří dlaždic s vepsaným číslem 2. Opakováním této úvahy nakonec získáme (jediná) dvě celistvá vydláždění celé plochy $3 \times 2n$ pro libovolné dané $n \geqq 2$.



Obr. 5

Zabývejme se nyní dlážděními plochy $3 \times 2n$, která nejsou celistvá. Každé z nich je tedy slepením vydláždění dvou ploch $3 \times 2k$ a $3 \times (2n-2k)$ pro vhodné $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Takové k ovšem nemusí být pro dané vydláždění jediné, a tak vybereme vždy *největší* vyhovující k; bude to právě takové k, při kterém už je výše zmíněné vydláždění „pravé" plochy $3 \times (2n-2k)$ celistvé (pro největší $k = n-1$ je to splněno automaticky), zatímco vydláždění „levé" plochy $3 \times 2k$ je libovolné.

Právě popsaným způsobem jsme všechna „necelistvá" vydláždění plochy $3 \times 2n$ s daným $n \geqq 2$ rozdělili do $n-1$ disjunktních skupin. Jejich celkový počet je roven, počítáno po skupinách,

$$a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 + a_{n-1} \cdot 3,$$

neboť první činitel v k-tém sčítanci udává vždy počet (všech) vydláždění „levé" plochy $3 \times 2k$, zatímco druhý činitel udává počet celistvých vydláždění „pravé" plochy $3 \times (2n-2k)$. Přidáme-li tomuto součtu ještě sčítanec 2 za dvě celistvá vydláždění celé plochy $3 \times 2n$, obdržíme pro každé $n \geqq 2$ kýžený rekurentní vztah

$$a_n = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) + 3a_{n-1} + 2. \tag{3}$$

Odtud se od hodnoty $a_1 = 3$ postupně dostaneme až k hledané hodnotě a_5, a tak ukončíme alternativní řešení celé zadané úlohy:

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 11,\ a_3 = 2a_1 + 3a_2 + 2 = 41,\ a_4 = 2(a_1 + a_2) + 3a_3 + 2 = 153,$$
$$a_5 = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 3a_4 + 2 = 571.$$

Poznámka 2. Ukažme ještě, že poměrně složitě zapsanou rekurentní závislost (3) lze stejně jako v prvním řešení zjednodušit do tvaru rovnice (2) uvedené v poznámce 1. Skutečně, podle (3) pro libovolné $n \geqq 1$ platí

$$a_{n+2} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 3a_{n+1} + 2,$$
$$a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 3a_n + 2$$

a po odečtení druhé rovnosti od první vychází

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{neboli} \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Návodné a doplňující úlohy:

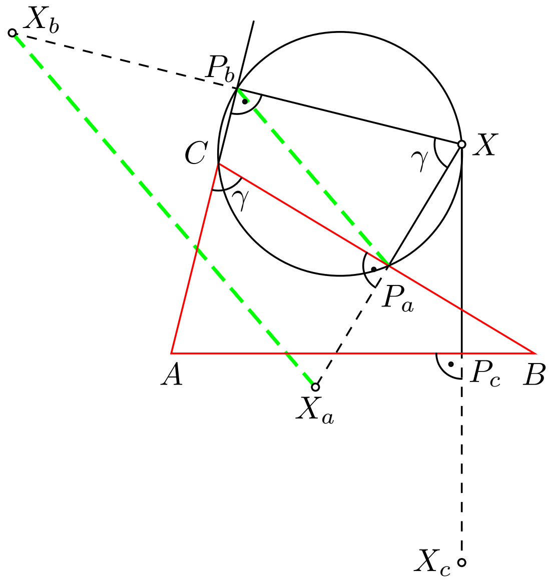
1. Najděte rekurentní vztah k určování počtů $s(n)$ způsobů zdolání schodiště o n schodech, jsou-li povoleny pouze kroky o jeden, dva nebo tři schody. [$s(n) = s(n-1) + s(n-2) + s(n-3)$ pro každé $n > 3$.]
2. Ukažte, že počty způsobů vydláždění plochy $2 \times n$ dlaždicemi 2×1 pro jednotlivá $n = 1, 2, 3, \ldots$ tvoří proslulou Fibonacciovu posloupnost
$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots,$$
v níž je každý člen (počínaje třetím) roven součtu dvou předchozích členů. [Všechna vydláždění plochy $2 \times n$ pro dané $n \geqq 3$ rozdělte do dvou skupin podle toho, zda pravý okraj dláždění je tvořen jednou svislou, nebo dvěma vodorovnými dlaždicemi. Vysvětlete, proč v každé z obou skupin je právě tolik vydláždění, kolik je všech vydláždění ploch $2 \times (n-1)$, resp. $2 \times (n-2)$.]
3. Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$
[62–A–I–3]
4. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý či lichý počet „slabik" BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, zatímco slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků. [56–A–I–3]
5. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova" délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po sobě jdoucích písmen A, ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá. [53–A–II–2]
6. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova" délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A, ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B. Určete hodnotu výrazu
$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$
[53–A–III–2]

6. *V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

Řešení. Vedeni zadáním úlohy, zvolíme jakýkoliv bod X roviny ABC a sestrojíme jeho obrazy X_a, X_b, X_c v osových souměrnostech podle přímek BC, CA, AB (obr. 6). Abychom mohli posoudit otázku, kdy dostaneme rovnostranný trojúhelník $X_aX_bX_c$, dokážeme nejprve, že pro vzájemné vzdálenosti jeho vrcholů platí obecně (tj. bez ohledu na volbu bodu X) vzorce

$$|X_aX_b| = 2|XC|\sin\gamma, \quad |X_aX_c| = 2|XB|\sin\beta, \quad |X_bX_c| = 2|XA|\sin\alpha, \tag{1}$$

ve kterých α, β, γ je obvyklé označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.



Obr. 6

Jistě stačí dokázat pouze první rovnost v (1). Ta je zřejmá v případě $X = C$, neboť tehdy platí $X_a = X_b$ ($= X$). V případě $X \neq C$ je XC průměrem Thaletovy kružnice z obr. 6, na níž leží vyznačené kolmé průměty P_a, P_b bodu X na přímky BC, CA. Protože tětivě P_aP_b přísluší obvodové úhly γ a $180° - \gamma$, ze sinové věty plyne rovnost $|P_aP_b| = |XC| \sin\gamma$. S ohledem na to, že úsečka X_aX_b je zřejmě obrazem tětivy P_aP_b ve stejnolehlosti se středem v bodě X a koeficientem 2, platí $|X_aX_b| = 2|P_aP_b|$, čímž jsou rovnosti (1) dokázány.

Ze vzorců (1) vyplývá, že naší úlohou je najít právě ty body X roviny ABC, pro něž platí

$$2|XA| \sin\alpha = 2|XB| \sin\beta = 2|XC| \sin\gamma > 0$$

(právě tehdy je totiž trojúhelník $X_aX_bX_c$ rovnostranný). Jinak vyjádřeno, hledáme body X, jejichž vzdálenosti od vrcholů A, B, C jsou kladné a splňují úměru

$$|XA| : |XB| : |XC| = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{|BC|} : \frac{1}{|AC|} : \frac{1}{|AB|}$$

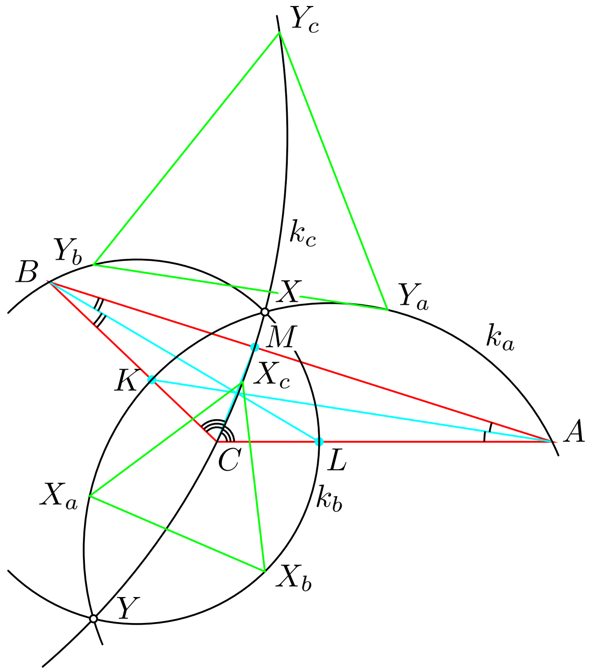
(kvůli dalšímu výkladu jsme využili sinovou větu a přešli od sinů úhlů k délkám protějších stran v $\triangle ABC$). Právě takové body X sestrojíme jako společné body následujících tří Apolloniových kružnic, přesněji množin bodů X zadaných rovnicemi

$$k_a\colon \frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad k_b\colon \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad k_c\colon \frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|AC|}{|BC|}; \tag{2}$$

přitom je zřejmé, že libovolným průsečíkem dvou těchto kružnic bude procházet i kružnice třetí.[4] Z rovností v (2) je patrné, že $A \in k_a$, $B \in k_b$ a $C \in k_c$. To usnadňuje praktickou konstrukci těchto tří kružnic: jsou-li AK, BL, CM příčky trojúhelníku ABC, na kterých leží osy jeho vnitřních úhlů (obr. 7), leží na kružnici k_a nejen bod A, ale i bod K (v důsledku dobře známé úměry $|KB| : |KC| = |AB| : |AC|$), takže střed kružnice k_a můžeme sestrojit jako průsečík osy úsečky AK s přímkou BC (není-li ovšem

[4] Některé z těchto množin (jedna nebo tři) mohou být přímkami namísto kružnicemi. Budeme se tomu věnovat později při diskusi o počtu řešení.

$|AB| = |AC|$, kdy k_a je osa strany BC). Podobně užitím os úseček BL, CM určíme středy kružnic k_b, k_c. Na obrázku 7 vidíme situaci, kdy kružnice k_a, k_b, k_c mají dva společné body X, Y, a naše úloha tak má dvě řešení.[5] Jsou na něm vykresleny i odpovídající rovnostranné trojúhelníky $X_aX_bX_c$ a $Y_aY_bY_c$. Není náhoda, že jejich vrcholy leží po jednom na odpovídajících kružnicích k_a, k_b a k_c, neboť středy těchto kružnic leží na osách dotyčných souměrností.



Obr. 7

I když je zadaná úloha *konstrukčně* vyřešena, musíme ještě posoudit otázku, kolik má úloha řešení, tedy otázku počtu společných bodů Apolloniových kružnic k_a, k_b, k_c (jak víme, stačí vzít dvě z nich). Odpověď podáme v následujícím oddílu; vypomůžeme si přitom opět poznatkem o existenci příček výchozího trojúhelníku ABC, jež jsou zároveň tětivami zkoumaných kružnic; zachováme i jejich označení AK, BL, CM z obrázku 7.

Diskuse.

a) Je-li trojúhelník ABC *rovnostranný*, jsou k_a, k_b, k_b osy jeho stran, a úloha tak má jediné řešení, kterým je střed daného rovnostranného trojúhelníku.

b) Je-li trojúhelník ABC *rovnoramenný* a platí-li například $|AB| \neq |AC| = |BC|$, je k_c osa jeho základny AB, která protne kružnici k_a ve dvou bodech, neboť protíná její tětivu AK, a tedy i oba její oblouky AK. Pro rovnoramenný trojúhelník ABC, který není rovnostranný, má tudíž úloha vždy dvě řešení.

c) Je-li trojúhelník ABC *různostranný* a je-li například AB jeho nejdelší strana (jako na obr. 7), mají kružnice k_a, k_b, jak ukážeme, dva společné body. Protože kružnice k_a je dána rovnicí $|XB|/|XC| = |AB|/|AC| > 1$, leží bod B v její vnější oblasti a bod C v její vnitřní oblasti. Proto ve vnitřní oblasti k_a leží i celá úsečka AC (s výjimkou bodu A), tedy i její vnitřní bod L. Kružnice k_a tak protíná tětivu BL kružnice k_b, a proto se protínají i obě kružnice. Pro různostranný trojúhelník ABC má tudíž úloha vždy dvě řešení.

---

[5] Jak uvidíme za okamžik, dvě řešení zadané úlohy budou existovat, kdykoliv výchozí trojúhelník ABC nebude rovnostranný. Netriviálnost tohoto poznatku nepřímo podporuje i skutečnost, že obě řešení X a Y na obr. 7 leží vně trojúhelníku ABC.

Návodné a doplňující úlohy:

Soutěžní úloha se vztahuje k studijnímu tématu tohoto ročníku MO kategorie A, kterým jsou *Apolloniovy kružnice*, neboli kružnice, jež spojujeme s následujícím tvrzením. *Předpokládejme, že v rovině* π *jsou dány dva různé body* A, B *a že je rovněž dáno kladné číslo* $\lambda \neq 1$. *Pak množina*

$$\mathsf{M} = \{X \in \pi;\ |AX| : |BX| = \lambda\}$$

je kružnice se středem na přímce AB. Právě tato množina M se nazývá Apolloniovou kružnicí (příslušnou daným bodům A a B a danému poměru λ).

Důkaz uvedeného tvrzení předkládáme níže jako návodnou úlohu 1 (opatřenou řešením). Dodejme ještě, že v případě poměru $\lambda = 1$ je M zřejmě osa úsečky AB. Pro podrobnější seznámení s tématem doporučujeme text na str. 11–14. brožurky L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995.

1. Dokažte výše uvedené tvrzení o množině M bodů v rovině. [Nejprve ukážeme, že pro libovolný bod $X \in \mathsf{M}$, který neleží na přímce AB, platí: *Osy vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu* X *trojúhelníku* ABX *protínají přímku* AB *po řadě v bodech* P *a* Q, *které nezávisí na výběru bodu* X *a které samy patří do množiny* M (jsou to jediné dva body z M, které na přímce AB leží). Skutečně, ze sinové věty pro trojúhelníky APX a BPX plyne $|AP| : |AX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin\varphi$ a $|BP| : |BX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin(180^\circ - \varphi)$, kde $\gamma = |\sphericalangle AXB|$ a $\varphi = |\sphericalangle APX|$, odkud $|AP| : |BP| = |AX| : |BX| = \lambda$. Podobně se odvodí i druhá úměra $|AQ| : |BQ| = \lambda$. Z dokázaného tvrzení o bodech P a Q vyplývá, že každý bod množiny M nutně leží na Thaletově kružnici sestrojené nad (fixním) průměrem PQ. Zbývá ukázat opačné tvrzení o tom, že každý bod X této kružnice patří do množiny M, že tedy splňuje úměru $|AX| : |BX| = \lambda$. K tomu podle předchozího stačí předpokládat, že X neleží na přímce AB, a dokázat rovnost velikostí úhlů $\gamma_1 = |\sphericalangle PXA|$ a $\gamma_2 = |\sphericalangle PXB|$. Provedeme to v případě $\lambda > 1$, kdy uvažované body leží na přímce v pořadí A, P, B, Q (případ $0 < \lambda < 1$ se posoudí analogicky, nebo se prohozením bodů A, B přejde od poměru λ k poměru $1/\lambda$.) Protože úhly AXQ, BXQ mají po řadě velikosti $90^\circ + \gamma_1$, $90^\circ - \gamma_2$, ze sinové věty plynou rovnosti

   $$\lambda = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX|\sin\gamma_1}{|BX|\sin\gamma_2} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AX|\cos\gamma_1}{|BX|\cos\gamma_2},$$

   ze kterých vychází $\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma_2$, neboli $\gamma_1 = \gamma_2$. Celý důkaz tvrzení o množině M je hotov.]
2. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D neležící na stejné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$. [Koeficient $\lambda = |AB| : |CD|$ kýžené podobnosti známe; proto hledané body X sestrojíme jako průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a poměru λ, druhá bodům B, D a témuž poměru λ.]
3. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na jedné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž jsou úhly AXB, BXC, CXD navzájem shodné. [Hledané body X jsou průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a prochází bodem B (ten tedy určuje příslušný dělící poměr), druhá přísluší bodům B, D a prochází bodem C.]