63. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel* 1 *nebo* −1*. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu.*

Řešení. Označme S zkoumanou hodnotu, tj. součet čísel na stranách 63úhelníku. Pokud přiřadíme každému vrcholu 63úhelníku číslo 1, dostaneme $S = 63$, protože ke každé jeho straně bude připsáno číslo 1. Přitom je zřejmé, že ke každému zvolenému očíslování vrcholů lze dojít postupnou změnou 1 na −1.

Nyní zkoumejme, jak se bude měnit hodnota S, když změníme hodnotu v některém vrcholu 63úhelníku z 1 na −1. Hodnoty v sousedních vrcholech označme jako a a b (na jejich pořadí nezáleží). Provedenou změnou zřejmě změníme odpovídající čísla na dvou stranách, které z tohoto vrcholu vycházejí (a na žádných jiných). Při výpočtu hodnoty S se tak změní hodnoty právě dvou sčítanců.

Pokud $a = b = 1$, zmenší se součet S o 4 (před změnou přispívala čísla a, b hodnotou $a + b = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ a po změně bude jejich příspěvek $1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2$). Podobně rozebereme i ostatní možnosti:

a	b	změna $a + b$	rozdíl v hodnotě S
1	1	$2 \to -2$	-4
1	-1	$0 \to 0$	0
-1	1	$0 \to 0$	0
-1	-1	$-2 \to 2$	4

Vidíme tedy, že změna jednoho čísla ve vrcholu nemění zbytek čísla S při dělení čtyřmi. V úvodu jsme zjistili, že jedna z dosažitelných hodnot je $S = 63$, která dává při dělení čtyřmi zbytek 3, proto i nejmenší nezáporná hodnota musí dávat stejný zbytek 3, tudíž nejmenší možnou hodnotu součtu S budeme hledat mezi čísly $\{3, 7, 11, \ldots\}$.

Jak se snadno přesvědčíme, lze dosáhnout hodnoty $S = 3$: stačí do vrcholů 63úhelníku umístit následujících 63 čísel v uvedeném pořadí

$$\underbrace{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots, 1, 1, -1, -1}_{\text{60 čísel}}, 1, 1, 1$$

a dostaneme $S = 3$. Téhož součtu lze ovšem dosáhnout i jinou volbou čísel.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Do vrcholů pravidelného 63úhelníku vepíšeme libovolným způsobem 32 jednotek a 31 nul, přičemž do každého vrcholu vepíšeme jedno číslo. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší hodnotu, kterou může nabýt tento součet. [Součet je nezáporný, a jelikož jednotek je více než nul, na obvodu budou vedle sebe alespoň dvě jednotky, proto je každý součet alespoň 1 a takového součtu lze dosáhnout pravidelným střídáním čísel 1 a 0 ve vrcholech stran: začneme v libovolném vrcholu jedničkou a skončíme jedničkou v sousedním vrcholu z opačné strany.]

N2. Každému vrcholu pravidelného n-úhelníku přiřadíme číslo -1. V jednom kroku je dovoleno změnit dvě sousední čísla na opačná. Zjistěte, pro jaké hodnoty n je možné opakováním kroků dosáhnout, aby byla všechna čísla $+1$? [Pro sudé n to je možné, pro liché n to možné není. Při změně dvou čísel se nezmění zbytek součtu všech čísel při dělení čtyřmi a rozdíl mezi součtem všech čísel v požadované a v počáteční pozici je $2n$.]

D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na začátku, aby po konečném počtu vhodných kroků mohla být na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

D2. V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru otáčení hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem všechny mince postupně přesunout a) na 8 hromádek po 251 minci, b) na 251 hromádek po 8 mincích. [58–A–I–5]

D3. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přendáme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru otáčení hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přeložení dosáhnout, že pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n+1-k$ mincí. [58–A–III–5]

2. *Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici*

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

Řešení. Zřejmě x ani y nesmí být nula, protože se nacházejí ve jmenovateli zlomků v zadané nerovnici. V zadání nenacházíme zmínku o znaménku čísel x a y, proto nesmíme při úpravách zapomínat na to, že tato čísla mohou být i záporná.

Pokusíme se nejprve zjednodušit výrazy v zadání. Přenásobením nerovnice kladným číslem x^2y^2 se ekvivalentně zbavíme jmenovatelů:

$$\begin{aligned}(x+y)\frac{x+y}{xy} &\geqq \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2, \qquad \Big| \cdot x^2y^2\\ xy(x+y)^2 &\geqq (x^2+y^2)^2.\end{aligned}$$

Nyní je vidět, že roznásobením výrazů v získané nerovnici dostaneme člen $2x^2y^2$ na obou stranách — ten v prvním kroku zrušíme a nerovnici dále upravíme na součinový tvar:

$$\begin{aligned}x^3y+2x^2y^2+xy^3 &\geqq x^4+2x^2y^2+y^4,\\ x^3y+xy^3 &\geqq x^4+y^4,\\ 0 &\geqq x^4-x^3y+y^4-xy^3,\\ 0 &\geqq x^3(x-y)-y^3(x-y),\\ 0 &\geqq (x^3-y^3)(x-y). \qquad (1)\end{aligned}$$

Na pravé straně poslední nerovnice máme součin dvou dvojčlenů, a protože jej porovnáváme s nulou, stačí nám zkoumat znaménka jednotlivých závorek.

Pokud $x \geqq y$, je i $x^3 \geqq y^3$ a podobně pro $x \leqq y$ platí, že $x^3 \leqq y^3$ (je to důsledek toho, že funkce třetí mocniny je v celém oboru reálných čísel rostoucí). Výrazy v závorkách mají tudíž stejná znaménka pro libovolné hodnoty x a y, proto platí opačná nerovnost $(x^3-y^3)(x-y) \geqq 0$. Nerovnice (1) tak může být splněna pouze v případě, kdy je jedna ze závorek nulová. Rovnice $x = y$ a $x^3 = y^3$ jsou ekvivalentní, a proto nerovnost (1) platí, právě když $x = y$.

Řešením jsou všechny dvojice reálných čísel (x, y), kde $x = y \neq 0$. Při úpravách jsme použili pouze ekvivalentní úpravy, proto není zkouška správnosti nutná.

Poznámka. Součin na pravé straně (1) jsme mohli upravit také pomocí vzorce $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ na součin dvou nezáporných mnohočlenů:

$$(x^3 - y^3)(x - y) = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2).$$

Trojčlen v druhé závorce má totiž jako kvadratická funkce jedné neznámé (např. x) pro libovolné y nekladný diskriminant $D(y) = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leqq 0$. Proto rovnost $x^2 + xy + y^2 = 0$ nastane pouze v případě $x = y = 0$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice (x, y) kladných reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x/y + y/x \leqq 2$. [Po odstranění zlomků upravíme nerovnici na $(x - y)^2 \leqq 0$, která platí jen pro $x = y$.]

N2. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x/y + y/x \leqq 2$. [Řešením jsou všechny dvojice (x, y) takové, že $x = y \neq 0$ nebo $xy < 0$.]

N3. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici $x^2 + 4y^2 \leqq 4xy$. [Řešením jsou všechny dvojice (x, y) takové, že $x = 2y$.]

N4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost $x^4 + y^4 \geqq x^3y + xy^3$. [Úprava na součin.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

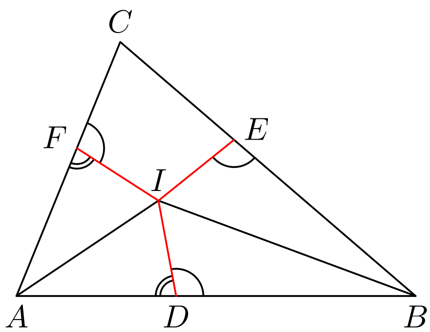
Zjistěte, kdy nastane rovnost. [49–A–II–3]

3. *Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.*

Řešení. Pokud některý z takto setrojených bodů E a F splyne s vrcholem C, je tvrzení úlohy triviální. Dále tedy budeme mlčky předpokládat, že tomu tak není a že používané úhly mají smysl.

Nejprve předpokládejme, že body E a F leží postupně na *úsečkách* BC a AC. Protože $|BD| = |BE|$ a bod I leží na ose úhlu ABC, jsou trojúhelníky DBI a EBI shodné podle věty *sus*. Podobně to platí i pro trojúhelníky DAI a FAI, a proto platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle IDB| = |\sphericalangle IEB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle IFA| = |\sphericalangle IDA|. \qquad (1)$$



Obr. 1

Tvrzení úlohy, že body C, E, F a I leží na jedné kružnici, je v takovém případě ekvivalentní tomu, že součet velikostí úhlů CFI a CEI je $180°$. S využitím rovností (1) dostáváme

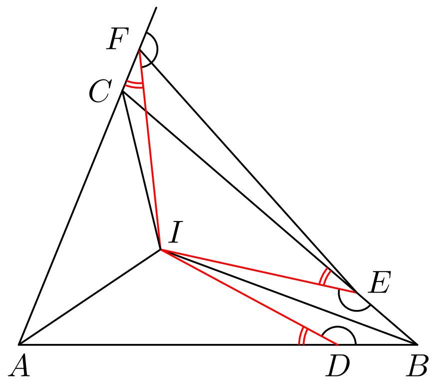
$$|\sphericalangle CFI| = 180° - |\sphericalangle IFA| = 180° - |\sphericalangle IDA| = |\sphericalangle IDB| = |\sphericalangle IEB| = 180° - |\sphericalangle CEI|,$$

tudíž součet protilehlých úhlů ve čtyřúhelníku $CFIE$ je skutečně $180°$.

Pokud je jeden z bodů E, F vnitřním a druhý vnějším bodem stran BC a AC, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod E leží na úsečce BC a bod F leží na polopřímce opačné k polopřímce CA. Pro takovou polohu bodů C, E, F a I nám stačí ukázat rovnost úhlů IFC a IEC. Znovu využijeme rovnosti (1) a dostaneme obdobně (obr. 2)

$$|\sphericalangle IFC| = |\sphericalangle IFA| = |\sphericalangle IDA| = 180^\circ - |\sphericalangle IDB| = 180^\circ - |\sphericalangle IEB| = |\sphericalangle IEC|,$$

odkud plyne, že úhly IFC a IEC jsou shodné.



Obr. 2

Třetí možnost, že by oba body E i F ležely vně příslušných stran trojúhelníku ABC, zřejmě nemůže nastat. V tom případě by totiž muselo pro jednotlivé délky platit

$$|AB| = |AD| + |BD| = |BE| + |AF| \geqq |BC| + |AC|,$$

což odporuje trojúhelníkové nerovnosti pro strany trojúhelníku ABC.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou tětivové. [Čtyřúhelníky mají dva protilehlé úhly pravé.]

N2. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou deltoidy. [Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC dělí každý čtyřúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.]

N3. Dané kružnice k a l se protínají ve dvou bodech B a C. Přímka p se dotýká kružnice k v bodě A. Přímky AB a AC protínají kružnici l postupně v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Dokažte, že přímky p a DE jsou rovnoběžné. [Využijte úsekový úhel při vrcholu A a obvodové úhly při vrcholech C a D nad tětivou BE. Je potřeba důsledně rozebrat všechny různé polohy bodů B, C, D a E na kružnici l.]

D1. Nechť P je bod na straně BC trojúhelníku ABC. Konstruujme postupně tyto body: Q na straně AB tak, aby $|BQ| = |BP|$, R na straně AC tak, aby $|AR| = |AQ|$, P' na straně BC tak, aby $|CP'| = |CR|$, Q' na straně AB tak, aby $|BQ'| = |BP'|$, R' na straně AC tak, aby $|AR'| = |AQ'|$. Dokažte, že $|CP| = |CR'|$, a to, že body P, Q, R, P', Q' a R' leží na jedné kružnici. [Z volby jednotlivých bodů plynou pro střed I kružnice vepsané rovnosti $|IP| = |IQ| = |IR| = |IP'| = |IQ'| = |IR'|$, takže všechny uvedené body leží na kružnici se středem I. A protože CI je osou rovnoramenného trojúhelníku PIR', je i trojúhelník CPR' rovnoramenný, tudíž $|CP| = |CR'|$.]

4. *Dana napsala na papír trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 2. Přehozením prvních dvou číslic vzniklo trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 3. Číslo vzniklé přehozením posledních dvou číslic původního čísla dává při dělení sedmi zbytek 5. Jaký zbytek při dělení sedmi bude mít číslo, které vznikne přehozením první a poslední číslice Danina čísla?*

Řešení. Označme číslice Danina čísla postupně a, b, c. Informaci o zbytcích při dělení sedmi ze zadání můžeme přepsat do rovnic

$$\begin{align} 100a + 10b + c &= 7x + 2, \tag{1}\\ 100b + 10a + c &= 7y + 3, \tag{2}\\ 100a + 10c + b &= 7z + 5. \tag{3} \end{align}$$

Číslice a a b nesmějí být nulové, protože jak první, tak i druhé číslo v zadání je trojmístné; proto $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a x, y a z jsou celá čísla.

Nyní se pokusíme postupně zjistit zbytek číslic a, b, c při dělení sedmi. To nám dá pro samotné číslice nejvýše dvě možnosti. Podíváme-li se na koeficienty v rovnicích (1)–(3), vidíme, že vhodným odečtením se dokážeme zbavit dvou číslic a i c najednou — pokud od desetinásobku rovnice (2) odečteme rovnici (3). Výsledek postupně upravíme tak, abychom zjistili zbytek číslice b při dělení sedmi

$$\begin{aligned} 10(100b + 10a + c) - (100a + 10c + b) &= 10(7y + 3) - (7z + 5),\\ 999b &= 70y - 7z + 25,\\ 5b &= 70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3 + 4,\\ 15b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) + 3 \cdot 4,\\ b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) - 7 \cdot 2b + 12. \end{aligned}$$

Protože na pravé straně v poslední rovnici jsou všechny členy kromě čísla 12 dělitelné sedmi, dává b stejný zbytek při dělení sedmi jako číslo 12, a jediná vyhovující číslice b je tak $b = 5$.

Odečtením rovnic (3) a (1) dostaneme rovnici $9c - 9b = 7(z - x) + 3$, odkud po dosazení $b = 5$ dostáváme

$$\begin{aligned} 9c - 9 \cdot 5 &= 7(z - x) + 3,\\ 2c &= 7\,(z - x - c) + 48,\\ 8c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) + 4 \cdot 6,\\ c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) - 7c + 7 \cdot 3 + 3. \end{aligned}$$

Z dělitelnosti jednotlivých členů sedmi tak dostáváme $c = 3$.

Nakonec dosazením $b = 5$ a $c = 3$ například do první rovnice snadno dopočítáme hodnotu a:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 7x + 2,\\ 100a + 53 &= 7x + 2 \qquad (53 = 7 \cdot 8 - 3,\ 98 = 7 \cdot 14),\\ 2a &= 7x + 2 - 7 \cdot 8 + 3 - 7 \cdot 14a,\\ a &= 4(7x - 7 \cdot 8 - 7 \cdot 14a) + 4 \cdot 5 - 7a, \end{aligned}$$

odkud vyplývá, že číslice a dává stejný zbytek při dělení sedmi jako číslo $20 = 7 \cdot 2 + 6$, a proto $a = 6$.

Dana tedy napsala na papír číslo 653, takže číslo vzniklé přehozením první a poslední číslice je $356 = 7 \cdot 50 + 6$ a dává při dělení sedmi zbytek 6.

Jiné řešení. Předešlé řešení můžeme zapsat přehledněji pomocí kongruencí.[1] Říkáme, že dvě přirozená čísla k a l jsou kongruentní modulo m, pokud dávají při dělení číslem m stejný zbytek, tj. pokud je číslo $k-l$ dělitelné číslem m. Uvedenou kongruenci zapisujeme jako $k \equiv l \pmod{m}$.

Nyní při stejném označení jako v prvním řešení můžeme rovnice (1)–(3) s využitím vztahů $100x \equiv 2x \pmod 7$ a $10x \equiv 3x \pmod 7$ zapsat jako

$$(100a + 10b + c \equiv)\quad 2a + 3b + c \equiv 2 \pmod 7, \tag{4}$$
$$(100b + 10a + c \equiv)\quad 2b + 3a + c \equiv 3 \pmod 7, \tag{5}$$
$$(100a + 10c + b \equiv)\quad 2a + 3c + b \equiv 5 \pmod 7. \tag{6}$$

S kongruencemi můžeme činit podobné ekvivalentní úpravy jako s obyčejnými rovnicemi — například vynásobit kongruenci celým číslem nebo odečíst dvě kongruence. Budeme postupovat podobně jako v předešlém řešení a pokusíme se získat kongruenci jen pro číslici b. Od trojnásobku kongruence (5) odečteme kongruenci (6) a dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2b + 3a + c) - (2a + 3c + b) &\equiv 3 \cdot 3 - 5 \pmod 7, \\ 5b &\equiv 4 \pmod 7, \qquad (7) \\ 15b &\equiv 12 \pmod 7, \\ b &\equiv 5 \pmod 7, \end{aligned}$$

odkud máme $b = 5$, protože to je jediná číslice dávající zbytek 5 při dělení sedmi. Kongruenci (7) jsme vynásobili třemi, abychom na levé straně dostali číslo, které je kongruentní s jednou modulo 7. Dá se ukázat, že pokud čísla k a m jsou nesoudělná, existuje vždy násobek čísla k, který je kongruentní s jedničkou modulo m.

Odečtením kongruencí (6) a (4) dostaneme

$$\begin{aligned} (2a + 3c + b) - (2a + 3b + c) &\equiv 5 - 2 \pmod 7, \\ 2c &\equiv 3 + 2b \pmod 7 \end{aligned}$$

a po dosazení $b = 5$ vyjde

$$\begin{aligned} 2c &\equiv 13 \equiv 6 \pmod 7, \\ 8c &\equiv 24 \pmod 7, \\ c &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

Jediná číslice dávající zbytek 3 při dělení sedmi je $c = 3$, přičemž jsme první kongruenci vynásobili číslem 4, abychom dostali $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Nakonec dosazením $b = 5$ a $c = 3$ například do čtyřnásobku kongruence (4) dostaneme

$$\begin{aligned} 4(2a + 3b + c) &\equiv 4 \cdot 2 \pmod 7, \\ 8a + 12b + 4c &\equiv 1 \pmod 7, \\ a + 5b + 4c &\equiv 1 \pmod 7, \\ a + 25 + 12 &\equiv 1 \pmod 7, \\ a &\equiv 6 \pmod 7. \end{aligned}$$

[1] Využijeme přitom pouze základní vlastnosti kongruencí, které v textu zmíníme bez důkazu. Dalšími zdroji pro studium této problematiky mohou být např. Alois Apfelbeck: *Kongruence*, ŠMM č. 21, nebo dokumenty
`thales.doa.fmph.uniba.sk/cincura/public/Element%20teoria%20cisel.pdf` či
`mks.mff.cuni.cz/library/KongruenceMS/KongruenceMS.pdf`

Řešením soustavy kongruencí jsme dospěli ke stejné trojici číslic a, b, c jako v předešlém řešení se soustavou rovnic.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Při dělení číslem 99 je zbytek libovolného trojmístného čísla stejný jako zbytek čísla, které vznikne z původního čísla čtením odzadu. Přesvědčte se! [$(100a + 10b + 10c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$]

N2. Dokažte, že čísla $\overline{aba}$ a $\overline{bab}$ dávají stejný zbytek při dělení sedmi. (Výraz $\overline{klm}$ označuje zápis trojmístného čísla s číslicemi k, l, m v desítkové soustavě.) [$\overline{aba} - \overline{bab} = (101a + 10b) - (101b + 10a) = 7 \cdot 13(a - b)$]

N3. Jisté čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Pokud zapíšeme jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší čtyřmístné číslo, které je také dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo. [58–A–II–1]

D1. Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, které začínalo stejnou číslicí jako původní číslo, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat? [57–C–I–6]

D2. Janko má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, které lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách? [61–C–II–2]

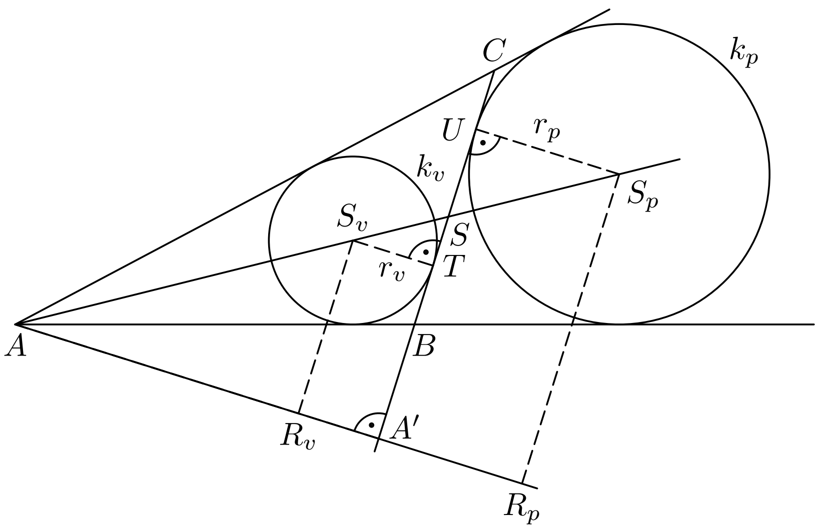
D3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ (v desítkové soustavě), pro která platí rovnost

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

[49–A–III–6]

5. *V rovině jsou dány body A, T, U tak, že úhel ATU je tupý. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém T, U jsou po řadě body dotyku strany BC s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany BC dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.)*

Řešení. Označme $k_v(S_v; r_v)$ kružnici vepsanou hledanému trojúhelníku ABC a $k_p(S_p; r_p)$ kružnici připsanou jeho straně BC. Středy S_v a S_p leží na ose úhlu BAC, jejíž průsečík se stranou BC ještě označíme S. Přímky AB, AC a BC jsou společnými tečnami kružnic k_v a k_p, které jsou tudíž stejnolehlé podle středů A a S (obr. 3). Bod S



Obr. 3

je přitom středem vnitřní stejnolehlosti, v níž si odpovídají rovněž body T a U dotyku kružnic k_v a k_p s úsečkou BC. Podle zadání je ovšem $T \neq U$ (předpokládá se totiž existence úhlu ATU), takže střed S vnitřní stejnolehlosti kružnic k_v, k_p je tím bodem úsečky TU, který ji dělí v poměru $r_v : r_p$, a ten je podle vnější stejnolehlosti roven poměru $|AS_v| : |AS_p|$. Platí tedy

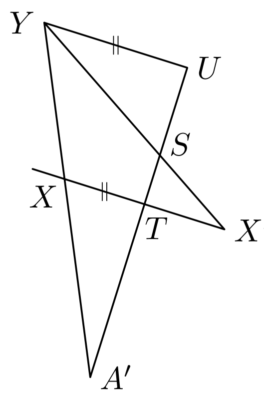
$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Označme nyní A' kolmý průmět bodu A na přímku BC a R_v a R_p kolmé průměty středů S_v a S_p na přímku AA'. Protože A, S_v, S, S_p je pořadí bodů na jedné přímce, mají jejich kolmé průměty na přímky BC a AA' pořadí A', T, S, U, respektive A, R_v, A', R_p (obr. 3).[2] Z pravoúhelníků $S_vR_vA'T$ a $S_pR_pA'U$ zřejmě plyne

$$\frac{|A'T|}{|A'U|} = \frac{|R_vS_v|}{|R_pS_p|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Porovnáním odvozených rovností dostaneme úměru $|ST| : |SU| = |A'T| : |A'U|$. Podle ní neznámý bod S dělí zadanou úsečku TU v poměru určeném bodem A', jehož polohu na polopřímce UT vně úsečky UT známe. A jakmile sestrojíme bod S, můžeme sestrojit i střed S_v, který leží na přímce AS a na kolmici k přímce TU vedené bodem T. Vrcholy B a C pak získáme jako průsečíky tečen z vrcholu A ke kružnici $k_v(S_v; r_v{=}|S_vT|)$ s přímkou TU.

K sestrojení bodu S využijeme např. následující postup (obr. 4): V polorovině TUA



Obr. 4

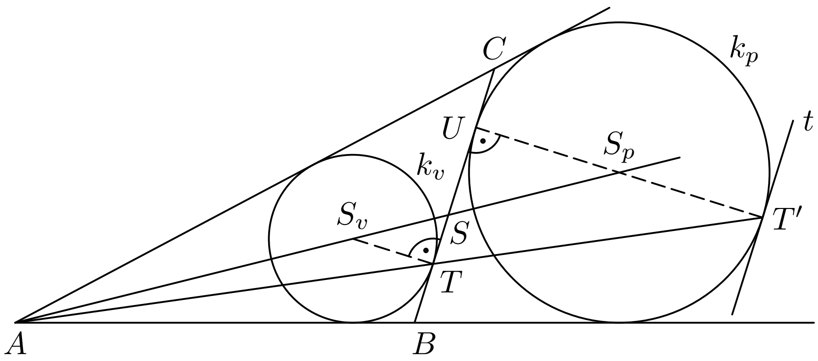
zvolme nějaký bod Y a k němu uvnitř úsečky $A'Y$ sestrojme bod X tak, aby úsečky TX, UY byly stejnolehlé podle středu A'. Označme X' bod souměrně sdružený s bodem X podle středu T. Průsečík přímek TU a $X'Y$ je pak hledaným bodem S, neboť je středem stejnolehlosti úseček TX' a UY, takže podle obou zmíněných stejnolehlostí platí

$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|TX'|}{|UY|} = \frac{|TX|}{|UY|} = \frac{|A'T|}{|A'U|}.$$

Díky podmínce tupého úhlu ATU padne bod S_v výše uvedenou konstrukcí na přímku AS do polohy mezi body A a S, tudíž celá úloha bude mít jediné řešení (nehledíme-li na možnost prohodit označení vrcholů B a C).

[2] Všimněme si, že z pořadí bodů A', T, U a kolmosti $AA' \perp TU$ plyne, že úhel ATU je tupý (bez této podmínky by úloha neměla řešení).

Jiné řešení. Použijeme stejné označení jako v předešlém řešení. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem r_p/r_v se bod $T \in k_v$ zobrazí do bodu $T' \in k_p$ (obr. 5).



Obr. 5

Z vlastnosti použité stejnolehlosti víme, že tečna t ke kružnici k_p vedená bodem T' je rovnoběžná s tečnou ke kružnici k_v vedenou bodem T, což je přímka BC. Přímka S_pU je tedy kolmá nejen na přímku TU, ale i na tečnu t, takže úsečka $T'U$ je průměrem kružnice k_p. Odtud plyne následující *konstrukce*:

1. Bod T' je průsečíkem přímky AT a kolmice z bodu U na přímku UT. Protože úhel ATU je tupý, leží bod T' v opačné polorovině určené přímkou TU než bod A.
2. Kružnice k_p je kružnice s průměrem UT'.
3. Body B a C jsou průsečíky tečen z bodu A ke kružnici k_p s přímkou TU.

Úloha má jediné řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si učebnicové poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic a jejím užití při konstrukci společných tečen.

N1. Do pásu určeného dvěma rovnoběžkami $p \parallel q$, $p \neq q$, vepišme kružnici tak, že se dotýká obou přímek. Dokažte, že poloměr kružnice je polovinou vzdálenosti přímek p a q. [Průměr kružnice, který je kolmý na přímku p, ma délku rovnou vzdálenosti rovnoběžek p a q.]

N2. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že bod A, střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané a střed kružnice připsané ke straně BC leží v přímce. [Ta přímka je osou úhlu BAC.]

N3. Na úsečce AB sestrojte bod X tak, aby platilo $|AX| : |BX| = p$, kde $p > 0$ je dané číslo. [Na kolmici k přímce AB bodem A sestrojte bod C tak, aby $|AC| = p$, a na kolmici k přímce AB bodem B sestrojte bod D tak, aby $|BD| = 1$, přičemž body C a D leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Bod X je průsečík AB a CD.]

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$. Dokažte, že průsečík P jeho úhlopříček AC a BD leží na spojnici středů stran AB a CD. [Průsečík úhlopříček je střed stejnolehlosti obou základen, takže jejich středy si musejí odpovídat.]

D2. Označme r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Její tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku z něj vytínají tři menší podobné trojúhelníky, poloměry jim vepsaných kružnic označíme r_a, r_b a r_c. Dokažte rovnost $r_a + r_b + r_c = r$. [Tibor Fonód, Milan Maxian: *Geometrické perličky*, úloha 3.10. Při vhodném označení poloměrů bude příslušný poměr podobnosti $r_a/r = (v_a - 2r)/v_a$, kde v_a značí velikost výšky trojúhelníku ABC na stranu a, a podobně pro strany b a c. Požadovanou rovnost pak dostaneme z následujících rovností pro obsah S trojúhelníku ABC: $2S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c = r(a + b + c)$.]

6. *Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 lze rozlomit na čtyři části délky nejvýše r tak, aby ze žádných tří těchto částí nešlo složit trojúhelník.*

Řešení. Jediným kritériem, zda dovedeme sestrojit trojúhelník se stranami daných délek, je trojúhelníková nerovnost. K sestrojení trojúhelníku stačí, aby *největší délka byla* *menší než součet zbylých dvou.* Pokud platí tato nerovnost, platí i ostatní trojúhelníkové nerovnosti a trojúhelník lze sestrojit. Pokud to neplatí, trojúhelník sestrojit nelze, protože neplatí trojúhelníková nerovnost. *Trojúhelník nelze ze tří stran daných délek sestrojit, právě když největší délka je alespoň taková jako součet zbylých dvou.*

Předpokládejme, že r je hledané nejmenší číslo. To znamená, že umíme hůl rozlomit na čtyři části délky nejvýše r tak, že ze žádných tří těchto částí se nedá složit trojúhelník. Nejdelší z částí musí mít délku r, protože jinak by r nebylo nejmenší číslo s požadovanou vlastností. Délky ostatních částí označme x, y, z, r tak, že $x \leqq y \leqq z \leqq r$ a $x + y + z + r = 1$, a předpokládejme stále, že ze žádných tří takových částí nelze sestrojit trojúhelník, což nyní vyjádříme příslušnými nerovnostmi.

Z trojice délek (x, y, z) není možno sestrojit trojúhelník, právě když $x + y \leqq z$. Jelikož $z \leqq r$, plyne odtud i příslušná nerovnost $x + y \leqq r$ pro trojici (x, y, r), takže ani z těchto tří délek není možné sestrojit trojúhelník. Podobně pro trojici délek (y, z, r) platí, že z nich nelze sestrojit trojúhelník, právě když $y+z \leqq r$, a protože $x \leqq y$, vyplývá odtud příslušná nerovnost $x + z \leqq r$ i pro trojici délek (x, z, r).

Ze žádných tří částí tudíž nesvedeme složit trojúhelník, právě když budou kromě rovnosti $x + y + z + r = 1$ splněny i obě podmínky

$$x + y \leqq z \qquad \text{a} \qquad y + z \leqq r. \tag{1}$$

Pokud do první nerovnosti (1) dosadíme $x + y = 1 - z - r$, dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - z - r &\leqq z, \\ 1 - r &\leqq 2z. \end{aligned} \tag{2}$$

Protože $y \geqq x$, má druhá nerovnost z (1) následující důsledek:

$$r \geqq y + z = \frac{y + y + z}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{x + y + z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2}.$$

V získané nerovnosti ještě pomocí nerovnosti (2) odhadneme z, takže dostaneme

$$r \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{1 - r}{4} \geqq \frac{3}{4}(1 - r),$$

z níž už porovnáním pravé a levé strany plyne požadovaný odhad hodnoty r:

$$4r \geqq 3(1 - r) \quad \text{neboli} \quad r \geqq \frac{3}{7}.$$

Zbývá ukázat, že existuje rozlomení tyče délky 1 na čtyři části délky nejvýše $3/7$ tak, že ze žádných tří těchto částí pak nelze složit trojúhelník — vyhovují například délky $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$.

Jiné řešení. K hodnotě $r = 3/7$ lze dojít i intuitivním přístupem, zejména pokud se nejprve pokusíme vyřešit úlohu pro rozlomení tyče na tři části. Podobně jako v předešlém řešení označme délky jednotlivých částí jako $x \leqq y \leqq z \leqq r$. Úlohu si zjednodušíme tak, že se omezíme na případ $y = x$. Aby se z délek (x, y, z) nedal sestrojit trojúhelník, musí platit $z \geqq x + y = 2x$; vezměme tedy $z = 2x$. Konečně, aby nešel sestrojit trojúhelník ani z délek (y, z, r), stačí, když bude platit $r = z + y = 2x + x = 3x$. Odtud vychází $x + y + z + r = x + x + 2x + 3x = 7x = 1$, a tudíž $r = 3x = 3/7$.

Skutečně, z žádné trojice z délek $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$ nelze trojúhelník sestrojit.

Zbývá ještě ukázat, že tato hodnota r je nejmenší. Jinými slovy, pokud rozlomíme tyč délky 1 na libovolné čtyři části, přičemž každá z nich bude mít délku menší než $3/7$, pak se z některých tří částí trojúhelník složit dá. Označme délky rozlomených částí jako $a \leqq b \leqq c \leqq d < 3/7$, přičemž $a+b+c+d = 1$. Zkoumejme dvě možnosti pro hodnotu a.

Pokud by platilo $a < 1/7$, dostali bychom z nerovnosti $d < 3/7$ a rovnosti $1 = a + b + c + d$, že $1 - 1/7 - 3/7 < b + c$. V tom případě by ale bylo $d < 3/7 < b + c$, a proto by z délek $b \leqq c \leqq d$ šlo sestrojit trojúhelník. Pokud by platilo $1/7 \leqq a$, bylo by $1/7 \leqq a \leqq b$. Kdyby za těchto podmínek ani jedna z trojic (a, b, c), (a, c, d) nesplňovala trojúhelníkové nerovnosti, muselo by platit $2/7 \leqq a + b \leqq c$ a následně $3/7 = 1/7 + 2/7 \leqq a + c \leqq d$, což je ve sporu s tím, že $d < 3/7$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 je možné rozlomit na tři části délky nejvýše r tak, aby se z nich nedal složit trojúhelník. [$r = 1/2$, nejdelší část musí být alespoň polovina celé délky]

N2. Dokažte, že v libovolném čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z hran, které z něj vycházejí, je možno sestrojit trojúhelník. [Nechť nejdelší hrana v čtyřstěnu $ABCD$ je AB. Pokud se z hran u vrcholu A nedá sestrojit trojúhelník, tak $|AC| + |AD| \leqq |AB|$. Z trojúhelníkových nerovností $|AC| + |BC| > |AB|$ a $|AD| + |BD| > |AB|$ dostaneme, že z hran vycházejících z vrcholu B trojúhelník sestrojit lze, protože $|BC| + |BD| > > 2|AB| - |AC| - |AD| \geqq |AB|$.]

D1. Na zapomenuté tabuli v Rosťově ještě zapomenutější tmavé komnatě je nakreslených pět už skoro zapomenutých úseček. Z každé trojice z těchto úseček umíme složit trojúhelník. Dokažte, že umíme vybrat tři úsečky tak, že trojúhelník, který z nich vznikne, je ostroúhlý. [KMS 2008/2009, 3. zimní série, úloha 8]

D2. Vyřešte zadanou úlohu pro lámání tyče na pět (a případně více) částí. [Zobecněním úvahy v druhém řešení dostaneme pro pět částí hodnotu $r = 5/12$ a lámání na n částí vede na vzorec $r = \frac{F_n}{F_1 + \ldots + F_n}$, kde F_n je n-té Fibonacciho číslo.]