63. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabýt výraz* $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, *splňují-li reálná čísla* a, b, c *dvojici podmínek*

$$a + 3b + c = 6,$$
$$-a + b - c = 2.$$

Řešení. Sečtením obou rovnic zjistíme, že $b = 2$. Dosazením za b do některé z nich vyjde $c = -a$. Platí tedy $V = (a-2)^2 + (2+a)^2 + (-2a)^2$. Po umocnění a sečtení zjistíme, že $V = 6a^2 + 8 \geqq 8$. Rovnost nastane, právě když $a = 0$, $b = 2$ a $c = 0$.

Hledaná nejmenší hodnota výrazu V je tedy rovna 8.

Návodné a doplňující úlohy:

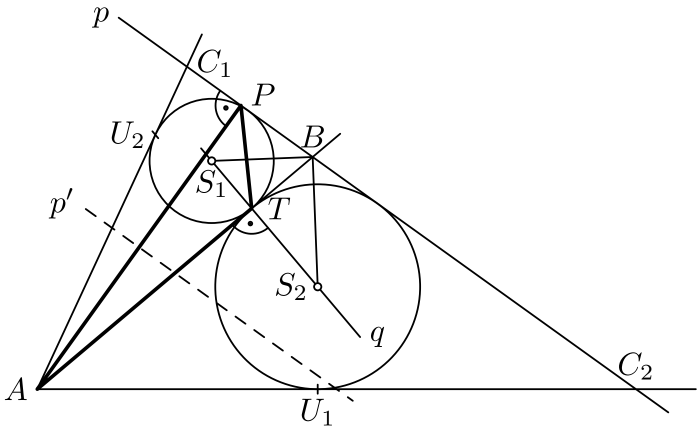
1. Určete nejmenší hodnotu výrazu $V = 5 + (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pro která x ji výraz nabývá?
2. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 6$. Pro které hodnoty a, b je W minimální? [$W = (a-3)^2 \geqq 0$]
3. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 6$. Pro které hodnoty a, b je Y minimální? [$Y = 3 + W \geqq 3$]
4. Určete největší možnou hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b jsou reálná čísla splňující podmínku $a + b = 8$. Pro které hodnoty a, b je K maximální? [$K = 5 + 8a - a^2 = -(a-4)^2 + 21 \leqq 21$, $a = b = 4$]
5. Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0$. [C–54–I–1]
6. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

   $$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

   Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$? [C–62–I–2]

2. *V rovině jsou dány body* A, P, T *neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník* ABC *tak, aby* P *byla pata jeho výšky z vrcholu* A *a* T *bod dotyku strany* AB *s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.*

Řešení. Vrchol B je určen polopřímkou AT a kolmicí p k výšce AP v bodě P (obr. 1), na níž leží strana BC. Přitom bod T musí být vnitřním bodem úsečky AB. Střed S kružnice trojúhelníku ABC vepsané pak dostaneme jako průsečík kolmice q



Obr. 1

k přímce AT v bodě T s osou úhlu ohraničeného přímkou p a polopřímkou BA. Její poloměr bude mít velikost $|ST|$.

Zbývá sestrojit vrchol C hledaného trojúhelníku ABC. Ten bude ležet jednak na přímce p, jednak na druhé tečně vepsané kružnice z vrcholu A, která je souměrně sdružená se stranou AB podle přímky AS. Stačí tedy sestrojit bod U dotyku strany AC s kružnicí vepsanou jako obraz bodu T v uvedené osové souměrnosti.

Odtud plyne *konstrukce*:

1. $p\colon P \in p$ a $p \perp AP$;
2. $B\colon B \in AT \cap p$, bod B musí ležet na polopřímce AT za bodem T;
3. $q\colon T \in q$ a $q \perp AT$;
4. u_1, u_2: dvě (navzájem kolmé) osy různoběžek AB, p;
5. $S_1, S_2\colon S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;
6. U_1, U_2: obrazy bodu T v souměrnostech podle přímek AS_1 a AS_2;
7. C_1, C_2: průsečíky přímky p s polopřímkami AU_1 a AU_2;
8. trojúhelníky ABC_1 a ABC_2.

Diskuse. Bod B konstruovaný v 2. kroku existuje, jen když úhel PAT je ostrý (jinak ani polopřímka AT neprotne přímku p) a zároveň bod T leží uvnitř poloroviny pA, což je ekvivalentní tomu, že i úhel APT je ostrý. Body S_1, S_2 existují vždy a jsou různé, neboť leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Ovšem kružnice vepsaná leží celá v trojúhelníku ABC, a tedy i v pásu určeném přímkou p a přímkou s ní rovnoběžnou, jež prochází vrcholem A, takže střed S vepsané kružnice musí padnout do pásu tvořeného přímkou p a přímkou p' s ní rovnoběžnou, jež půlí výšku AP. V takovém případě tečna ke kružnici $(S; |ST|)$ (souměrně sdružená s tečnou AB podle přímky AS) nepochybně protne přímku p v hledaném vrcholu C.

Diskusi shrneme takto: Jestliže pro vnitřní úhly trojúhelníku APT platí $|\sphericalangle PAT| \geqq$ $\geqq 90^\circ$ nebo $|\sphericalangle APT| \geqq 90^\circ$, nemá úloha řešení. Pokud platí $|\sphericalangle PAT| < 90^\circ$ a zároveň $|\sphericalangle APT| < 90^\circ$, je počet řešení 0 až 2 podle toho, kolik ze sestrojených bodů S_1 a S_2 leží mezi rovnoběžkami p a p'.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány body dotyku jeho stran s kružnicí mu vepsanou.
2. V trojúhelníku ABC označme po řadě P, Q, R paty výšek z vrcholů A, B, C. Dále postupně označme T, U, V body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
   a) A, C, V,
   b) A, U, R,
   c) A, P, Q,
   d) A, B, R.

   [V a) i b) umíme sestrojit vepsanou kružnici; v c) sestrojíme AB jako průměr kružnice určené danými body. Úloha d) nemá řešení, pokud R neleží na přímce AB. Jestliže R leží na přímce AB, má úloha nekonečně mnoho řešení.]

3. *Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněno, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n.*

Řešení. Nechť $n = pqr$, $p < q < r$. Rovnost $(p+1)(q+1)r = pqr + 915$ ekvivalentně upravíme na tvar $(p + q + 1) \cdot r = 915 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, z nějž plyne, že prvočíslo r může nabývat jen některé z hodnot 3, 5 a 61. Pro $r = 3$ však z poslední rovnice dostáváme $(p + q + 1) \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, neboli $p + q = 304$. To je ve sporu s tím, že r je největší. Analogicky zjistíme, že nemůže být ani $r = 5$. Je tedy $r = 61$ a $p+q = 14$. Vyzkoušením všech možností pro p a q vyjde $p = 3$, $q = 11$, $r = 61$ a $n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2\,013$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechna prvočísla p, q, pro něž platí $p + q = 14$.
2. Číslo n je součinem dvou různých prvočísel. Zvětšíme-li menší z nich o 1 a druhé ponecháme, jejich součin se zvětší o 7. Určete číslo n. [Výsledek: $n \in \{14, 21, 35\}$.]
3. Číslo n je součinem dvou prvočísel. Zvětšíme-li jedno z nich o 1 a druhé o 1 zmenšíme, jejich součin zůstane stejný. Určete číslo n. [Výsledek: $n = 6$.]
4. Číslo n je součinem dvou prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, jejich součin se zvětší o 35. Určete číslo n. [Výsledek: $n \in \{93, 145, 253, 289\}$.]

4. *Ve čtverci $ABCD$ označme K střed strany AB a L střed strany AD. Úsečky KD a LC se protínají v bodě M a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtěte jejich obsahy, jestliže úsečka LM má délku 1 cm.*

Řešení. Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 2), takže pravoúhlé trojúhelníky AKD a DLC jsou shodné podle věty *sus*. Kromě toho jsou trojúhelníky MLD a AKD podobné podle věty *uu*, neboť $|\sphericalangle LDM| = |\sphericalangle KDA|$ a $|\sphericalangle DLM| = |\sphericalangle DLC| = |\sphericalangle AKD|$. Analogicky lze ověřit i podobnost trojúhelníků MDC a AKD. Z podobnosti trojúhelníků AKD, MLD a MDC plyne, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\mathrm{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\mathrm{cm}$. Obsahy útvarů MLD, MDC a $AKML$ jsou

$$S_{MLD} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,\mathrm{cm}^2, \qquad S_{MDC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,\mathrm{cm}^2$$

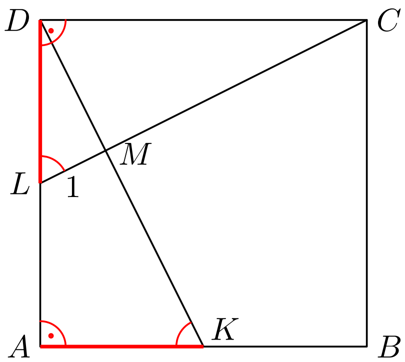
a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\mathrm{cm}^2.$$

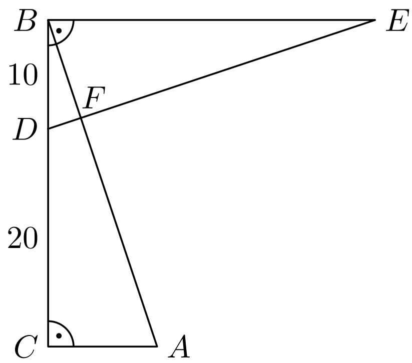
Nakonec pomocí Pythagorovy věty dostáváme $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\mathrm{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\mathrm{cm}^2.$$

Závěr. Obsahy trojúhelníků MLD, MDC a čtyřúhelníků $AKML$, $KBCM$ jsou po řadě $1\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $11\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 2



Obr. 3

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 3 a platí $|BD| = 10\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 20\,\mathrm{cm}$.
   a) Určete délky stran trojúhelníku ABC. [10, 30, $10\sqrt{10}$]
   b) Dokažte, že trojúhelníky DBF, ABC a BEF jsou navzájem podobné.
   c) Určete délky stran trojúhelníků DBF a BEF. [10, $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$; 30, $9\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$]

d) Určete obsahy trojúhelníků ABC, DBF a BEF. [150, 15, 135]

e) Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [135]

2. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 3. Trojúhelník BEF má obsah $30\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [30]
3. Dokažte věty:

   a) Mají-li dva trojúhelníky stejnou výšku, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru délek příslušných základen.

   b) Mají-li dva trojúhelníky shodné základny, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru příslušných výšek.
4. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC je $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Označme K střed strany AB a L takový bod strany BC, pro nějž platí $|CL| : |LB| = 1 : 2$. Určete obsahy útvarů, které vzniknou rozřezáním trojúhelníku ABC podél úseček KC a AL. [Nakreslete si obrázek, označte M průsečík úseček KC a AL, dokreslete úsečku BM a pomocí vět z předchozí úlohy spočítejte nejprve obsahy všech pěti trojúhelníků, které mají společný vrchol M.]
5. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojúhelníku FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [C–57–S–2]

5. *Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96.*

Řešení. Protože $96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 2^5$, budeme dokazovat dělitelnost součtu $S = n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dvěma nesoudělnými čísly 3 a 32.

Dělitelnost třemi: Protože číslo 2 013 je dělitelné třemi, stačí dokázat dělitelnost třemi zmenšeného součtu

$$S - 2\,013 = n^4 + 2n^2 = n^2(n^2 + 2).$$

V případě $3 \mid n$ je vše jasné, v opačném případě je $n = 3k \pm 1$ pro vhodné celé k, takže platí $3 \mid n^2 + 2$, neboť $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$.

Dělitelnost číslem 32: Protože $2\,016 = 32 \cdot 63$, stačí dokázat dělitelnost číslem 32 zmenšeného součtu

$$S - 2\,016 = n^4 + 2n^2 - 3 = (n^2 + 1)^2 - 2^2 = (n^2 + 3)(n^2 - 1).$$

Protože předpokládáme, že n je liché, tedy $n = 2k + 1$ pro vhodné celé k, platí

$$n^2 + 3 = (2k + 1)^2 + 3 = 4(k^2 + k + 1) \quad \text{a} \quad n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1).$$

Odtud plyne, že $32 \mid (n^2 + 3)(n^2 - 1)$, neboť číslo $k(k + 1)$ je sudé.

Poznámka. Dělitelnost číslem 32 lze dokazovat i bez provedeného algebraického rozkladu trojčlenu $n^4 + 2n^2 - 3$, ze kterého po dosazení $n = 2k + 1$ roznásobením dostaneme

$$n^4 + 2n^2 - 3 = 16k^4 + 32k^3 + 32k^2 + 16k = 16k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1).$$

Pro sudé k je dělitelnost takto upraveného výrazu číslem 32 zřejmá. Pro liché k je zase sudý součet $k^3 + 1$, takže je sudý i druhý činitel $k^3 + 2k^2 + 2k + 1$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.
2. Dokažte, že pro každé liché číslo n je číslo $n^2 - 1$ dělitelné osmi.
3. Dokažte, že pro všechna celá kladná čísla n je rozdíl $n^6 - n^2$ dělitelný šedesáti.
4. Určete všechna kladná celá čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. [C–55–I–1]
5. Určete všechna celá čísla n, pro něž je $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ prvočíslo. [C–62–I–5]

6. *Šachového turnaje se zúčastnilo 8 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů. Hráč, který skončil na 2. místě, získal stejný počet bodů jako poslední čtyři dohromady. Určete výsledek partie mezi 4. a 6. hráčem v celkovém pořadí.*

Řešení. Poslední čtyři hráči odehráli mezi sebou 6 partií, takže počet bodů, které dohromady získali, je aspoň 6. Hráč, který skončil na 2. místě, tedy získal aspoň 6 bodů. Kdyby získal více než 6, tedy alespoň 6,5 bodů, musel by nejlepší hráč (díky podmínce různých počtů) získat všech 7 možných bodů; porazil by tak i hráče na 2. místě, který by tudíž získal méně než 6,5 bodů, a to je spor. Hráč v pořadí druhý proto získal právě 6 bodů. Přesně tolik však získali dohromady i poslední čtyři, a tak mohli tyto body získat jen ze vzájemných partií, což znamená, že prohráli všechny partie s hráči z první poloviny výsledného pořadí. Hráč, který skončil na 6. místě, proto prohrál partii s hráčem, který skončil na 4. místě.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Šachového turnaje, ve kterém každý s každým odehrál jednu partii, se zúčastnilo n hráčů. Kolik partií bylo celkem odehráno? Kolik získali všichni dohromady bodů, jestliže za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný bod? [$\frac{1}{2}n(n-1)$]
2. Šachového turnaje se podle pravidel z předchozí úlohy zúčastnili 4 hráči. Vítěz turnaje získal stejný počet bodů jako zbývající tři hráči dohromady.
   a) Jaký největší a jaký nejmenší počet bodů mohl mít? [Získal právě 3 body.]
   b) Kolik partií mohlo skončit remízou, jestliže na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů? [Buď 0, nebo 1, nebo 2.]
3. Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelených v turnaji, přitom v žádných dvou utkáních jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek? [C–55–S–1]
4. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz? [C–58–I–1]