63. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geqq 3$ je $2n$-místné číslo s dekadickým zápisem

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96$$

druhou mocninou některého celého čísla.

2. Označme M střed strany AB libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90°$ platí, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB nebo pravoúhlý s přeponou AB.

3. Délky stran pravoúhelníku jsou celá čísla x a y větší než 1. V pravoúhelníku vyznačíme rozdělení na $x \cdot y$ jednotkových čtverců a pak z něj svinutím a slepením dvou protějších stran zhotovíme plášť rotačního válce. Každé dva vrcholy jednotkových čtverců na plášti spojíme úsečkou. Kolik z těchto úseček prochází vnitřními body tohoto válce? V případě $x > y$ rozhodněte, kdy bude tento počet větší — bude-li obvod podstavy válce roven x, anebo y?

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 10. prosince 2013

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

63. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Zadané číslo má vyjádření

$$\begin{aligned}
\bigl(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10^{n+1}\bigr)+2\cdot 10^{n}+8\cdot\bigl(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^{2}\bigr)+96&=\\
=10^{n+1}\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+2\cdot 10^{n}+8\cdot 10^{2}\cdot\frac{10^{n-2}-1}{9}+96&=\\
=\frac{10^{2n}-10^{n+1}+18\cdot 10^{n}+800\cdot 10^{n-2}-800+9\cdot 96}{9}&=\\
=\frac{10^{2n}+16\cdot 10^{n}+64}{9}=\Bigl(\frac{10^{n}+8}{3}\Bigr)^{2}&.
\end{aligned}$$

Získali jsme druhou mocninu celého čísla, neboť číslo 10^n+8 je dělitelné třemi — má totiž ciferný součet rovný 9. (Místo toho lze konstatovat, že kdyby zlomek $\dfrac{10^n+8}{3}$ nebyl celým číslem, nebyla by celým číslem ani jeho druhá mocnina, a to by byl spor.)

Jiné řešení. Objevíme-li experimentováním několik prvních rovností (neškodí si uvědomit, že vzoreček funguje i pro $n=2$)

$$1\,296=36^2,\ 112\,896=336^2,\ 11\,128\,896=3\,336^2,\ \ldots,$$

napadne nás jistě hypotéza, že pro každé $n\geqq 2$ bude platit

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96=\underbrace{33\ldots3}_{n-1}6^2.$$

Její důkaz provedeme užitím algoritmu písemného násobení:

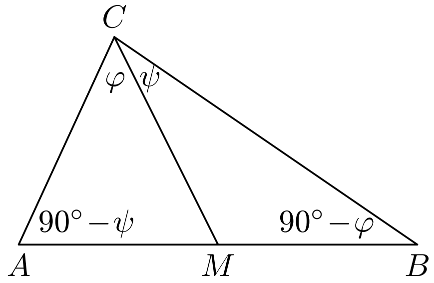
$$\begin{array}{r}
333\ldots3336\\
\times 333\ldots3336\\
\hline
2000\ldots0016\\
10000\ldots008\\
100000\ldots08\\
1000000\ldots8\\
\cdot^{\cdot^{\cdot}}\qquad\quad\ \cdot^{\cdot^{\cdot}}\\
1\ldots000008\\
10\ldots00008\\
100\ldots0008\\
\hline
111\ldots112888\ldots8896
\end{array}$$

Obě stejná násobená čísla jsou n-místná, na každém z n řádků mezi oddělujícími linkami stojí $(n+1)$-místné číslo. Z toho snadno určíme, jak stojí pod sebou číslice těchto posléze sčítaných čísel, a tedy i počty shodných číslic ve výsledku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při druhém postupu udělte 2 body za určení základu $33\ldots36$ druhé mocniny a 4 body za schéma jejího písemného výpočtu s obecným n. Pokud řešitel tyto výpočty písemně provede alespoň pro $n=3$ a pak zmíní analogii bez podrobnějšího popisu, udělte celkem 5 bodů. Chybí-li písemné výpočty a řešitel se místo nich odvolá na (nepovolenou) kalkulačku, neudělujte žádný bod vzhledem k porušení pravidla soutěže uvedeného u zadání úloh.

2. V první části řešení budeme předpokládat, že $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90°$. Při označení $\varphi = |\sphericalangle ACM|$ a $\psi = |\sphericalangle BCM|$ (obr. 1) je pak splněna nejen rovnost $|\sphericalangle ABC| = 90° - \varphi$, ale také rovnost $|\sphericalangle BAC| = 90° - \psi$, jak plyne ze součtu úhlů v $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BAC| &= 180° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = \\ &= 180° - (90° - \varphi) - (\varphi + \psi) = 90° - \psi.\end{aligned}$$



Obr. 1

Ze sinové věty pro trojúhelníky ACM a BCM tak vyplývá

$$\frac{\sin(90° - \psi)}{\sin\varphi} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CM|}{|BM|} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin\psi}.$$

Z porovnání krajních zlomků s ohledem na vzorec $\sin(90° - \omega) = \cos\omega$ plyne rovnost $\sin\varphi\cos\varphi = \sin\psi\cos\psi$ neboli $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$. Protože úhly φ a ψ jsou ostré, oba úhly 2φ a 2ψ leží v intervalu od 0° do 180°. Podle známé vlastnosti funkce sinus rovnost $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$ tak znamená, že je buď $2\varphi = 2\psi$, nebo $2\varphi + 2\psi = 180°$. V prvním případě ($\varphi = \psi$) je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, ve druhém případě ($\varphi + \psi = 90°$) je pravoúhlý s přeponou AB. Tím je dokázána první (obtížnější) ze dvou implikací, z nichž je složena ekvivalence ze zadání úlohy.

Při důkazu druhé (snazší) implikace nejprve předpokládejme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB. Podle Thaletovy věty tehdy platí $|MB| = |MC|$, a tak jsou shodné úhly MCB a MBC (neboli ABC), odkud již plyne

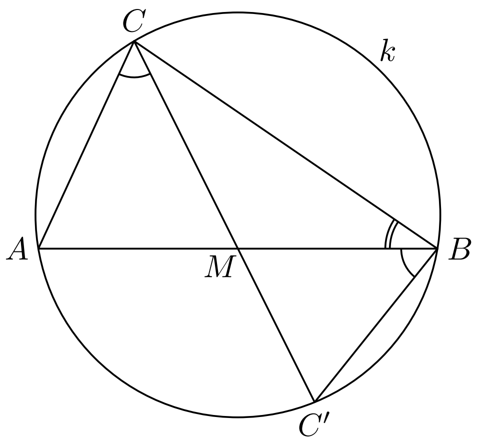
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle MCB| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ACB| = 90°.$$

Zbývá dokázat stejnou rovnost i za předpokladu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB. Tehdy však jsou trojúhelníky ACM a BCM shodné a mají při vrcholu M pravý úhel, takže platí

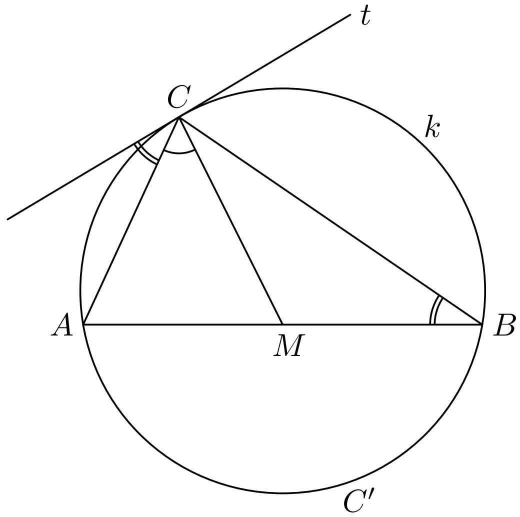
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle BCM| = 180° - |\sphericalangle BMC| = 90°.$$

Tím je i důkaz druhé implikace ukončen a celá úloha je vyřešena.

Jiné řešení. Sestrojme kružnici k opsanou danému trojúhelníku ABC a jeho těžnici CM prodlužme za bod M do tětivy CC' kružnice k (obr. 2). Ze shodnosti obvodového úhlu ABC' s obvodovým úhlem ACC' (neboli úhlem ACM) plyne, že součet úhlů ABC a ACM ze zadání úlohy má stejnou velikost jako úhel CBC'. Podle Thaletovy věty je tato velikost rovna 90°, právě když tětiva CC' kružnice k je jejím průměrem. To nastane, právě když střed S kružnice k bude ležet na polopřímce CM. Pro takovou situaci rozlišíme případy $S = M$ a $S \neq M$. První případ podle Thaletovy věty nastane, právě když bude trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB. Druhý případ (C, M a S jsou tři různé body ležící v přímce) nastane, právě když bude přímka MS, jež je osou úsečky AB, procházet bodem C, tedy právě když bude trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB (a přitom úhel ACB nebude pravý). Tím je dokázána celá ekvivalence ze zadání úlohy.



Obr. 2



Obr. 3

Poznámka. V předchozím postupu bylo možné namísto tětivy CC' kružnice k využít její tečnu t v bodě C (obr. 3). Ze shodnosti obvodového úhlu ABC s vyznačeným úsekovým úhlem mezi tětivou AC a tečnou t totiž plyne, že součet úhlů ABC a ACM je roven $90°$, právě když je tečna t kolmá k polopřímce CM, tedy právě když na této polopřímce leží střed S kružnice k.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za první (obtížnější) implikaci a 1 bod za oba případy druhé (snazší) implikace.

3. Hledaný počet úseček, které procházejí vnitřními body válce, určíme tak, že od celkového počtu sestrojených úseček odečteme jednak počet těch úseček, které leží na plášti válce, jednak počet těch úseček, které leží v některé z obou podstav válce.

Výpočet provedeme pro případ válce s obvodem podstavy x a výškou y. Spojované body jsou tedy na válci rozloženy na x úsečkách po $y+1$ exemplářích, takže jejich počet je $x(y+1)$. Pro počet P_0 všech sestrojených úseček proto platí vzorec

$$P_0 = \binom{x(y+1)}{2} = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2},$$

počet P_1 úseček ležících na plášti má vyjádření

$$P_1 = x \cdot \binom{y+1}{2} = \frac{x(y+1)y}{2}$$

a konečně počet P_2 úseček v obou podstavách je dán vzorcem

$$P_2 = 2 \cdot \binom{x}{2} = x(x-1).$$

Odtud již pro hledaný počet P úseček, které procházejí vnitřními body válce, dostaneme hledaný vzorec:

$$P = P_0 - P_1 - P_2 = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2} - \frac{x(y+1)y}{2} - x(x-1) = \\ = \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

Pro odpovídající počet Q úseček, které procházejí vnitřními body druhého válce s obvodem podstavy y a výškou x, zřejmě platí analogický vzorec

$$Q = \frac{y(y-1)(x^2+2x-1)}{2}.$$

Pro porovnání obou počtů P a Q upravíme jejich rozdíl $P - Q$ (s vědomím, že ten bude násobkem dvojčlenu $x - y$, neboť pro $x = y$ zřejmě platí $P = Q$):

$$\begin{aligned} 2(P-Q) &= (x^2-x)(y^2+2y-1) - (y^2-y)(x^2+2x-1) = \\ &= (x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2xy - x^2 + x) - \\ &\quad - (x^2y^2 - x^2y + 2xy^2 - 2xy - y^2 + y) = \\ &= 3xy(x-y) - (x-y)(x+y) + (x-y) = \\ &= (x-y)(3xy - x - y + 1). \end{aligned}$$

V případě $x > y$ jako větší vyjde číslo P, neboť ukážeme, že výraz $3xy - x - y + 1$ je kladný: z $y \geqq 2$ máme $3xy \geqq 6x$, a proto

$$3xy - x - y - 1 \geqq 5x - y + 1 > 4x + 1 > 0.$$

Poznámka. Popišme kratší způsob určení hledaného počtu úseček, a to opět pro válec s obvodem podstavy x a výškou y.

Kolmým průmětem každé počítané úsečky do podstavy je jedna z $\frac{1}{2}x(x-1)$ úseček, které spojují x bodů na hraniční kružnici. Do jedné z těchto úseček se vždy promítne $(y+1)^2 - 2 = y^2 + 2y - 1$ počítaných úseček, neboť $y + 1$ je počet spojovaných bodů se stejným průmětem a od součinu $(y+1)(y+1)$ je třeba odečíst číslo 2 za dvě spojnice ležící v podstavách. Hledaný počet P je tedy roven

$$P = \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za určení počtu úseček s body uvnitř válce a další 2 body pak za zdůvodnění, který z obou počtů je větší. První 4 body lze částečně udělovat takto: po 1 bodu za určení čísel P_0, P_1, P_2 a 1 bod za správný výsledný dopočet P.