63. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|$.

2. Množina M obsahuje 2 014 reálných čísel. Součet každých dvou různých čísel z množiny M je celé číslo.

a) Rozhodněte, zda existuje taková množina M, která neobsahuje žádné celé číslo.

b) Rozhodněte, zda existuje taková množina M, která obsahuje iracionální číslo.

3. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří mu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 23. ledna 2013

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Osu reálných čísel rozdělíme podle nulových bodů. Tedy podle čísel, pro která jsou hodnoty výrazů s absolutní hodnotou v dané rovnici rovny nule. Výrazu $|x+1|$ odpovídá $x = -1$ a výrazu $|2^x - 1|$ odpovídá $x = 0$. Dostáváme tak následující tři možnosti:

1) V případě $x \leqq -1$ vyjde $|x+1| = -(x+1)$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnice ze zadání pak je

$$2^{-(x+1)} - 2^x = 1 + 1 - 2^x \quad \text{neboli} \quad 2^{-(x+1)} = 2$$

a má jediné řešení $x = -2$. Zpětným dosazením se přesvědčíme, že je to opravdu řešení dané rovnice.

2) V případě $-1 < x \leqq 0$ vyjde $|x+1| = x+1$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnice ze zadání pak je

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 1 - 2^x \quad \text{neboli} \quad 2^{x+1} = 2$$

a má jediné řešení $x = 0$. Zpětným dosazením se přesvědčíme, že je to opravdu řešení dané rovnice.

3) Nakonec pro $0 < x$ vyjde $|x+1| = x+1$ a $|2^x - 1| = 2^x - 1$ a po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 2^x - 1 \quad \text{neboli} \quad 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x,$$

což je identita, která platí pro libovolné reálné číslo x. Všechna $x > 0$ jsou tedy řešeními dané rovnice.

Odpověď. Řešeními dané rovnice jsou $x = -2$ a libovolné $x \geqq 0$.

Poznámka. Místo kontroly řešení dosazením do dané rovnice stačí ověřit, že nalezené řešení padne do vyšetřovaného intervalu.

Jiné řešení. Rozebereme dva případy:

Pokud $x + 1 \geqq 0$, je $|x+1| = x+1$, takže danou rovnici lze zjednodušit na rovnici

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + |2^x - 1| \quad \text{neboli} \quad 2^x - 1 = |2^x - 1|.$$

Ta je splněna, právě když $2^x - 1 \geqq 0$, což platí, právě když $x \geqq 0$. V tomto případě jsou řešeními všechna x taková, že $x + 1 \geqq 0$ a zároveň $x \geqq 0$, neboli všechna nezáporná čísla x.

Pokud naopak $x + 1 < 0$, je rovněž $2^x - 1 < 0$ (neboť $x < 0$), takže daná rovnice dostane tvar

$$2^{-(x+1)} - 2^x = 1 - (2^x - 1) \quad \text{neboli} \quad 2^{-(x+1)} = 2.$$

Ta má jediné řešení $x = -2$ a to podmínku $x + 1 < 0$ splňuje.

Řešením dané rovnice je množina $\langle 0, \infty) \cup \{-2\}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel postupuje pomocí nulových bodů, udělte za jejich určení 1 bod. Za vyřešení případu $-1 \leqq x$ udělte 2 body, správně vyřešený případ $x > 0$ ohodnoťte 2 body a za poslední případ $-1 < x \leqq 0$ dejte 1 bod. Pokud řešení rozebírá pouze dvě možnosti jako ve druhém řešení, udělte za každou část 3 body. Za uhodnutí všech řešení udělte 1 bod, za uhodnutí jen některých (byť nekonečně mnoha) body nedávejte.

2. K vyřešení části a) stačí uvést příklad množiny, která neobsahuje žádné celé číslo, přičemž součet libovolných dvou jejích prvků je celé číslo. Množina $\mathsf{M} = \{1/2, 3/2, \ldots, 4\,027/2\}$ je jedním z příkladů takové 2 014prvkové množiny M.

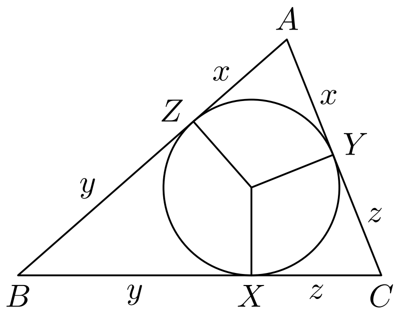
Označme libovolná tři čísla dané množiny M jako a, b a c. Ukážeme, že dvojnásobek čísla a je celé číslo. Čísla $a+b$ i $b+c$ jsou dle zadání celá, proto i jejich rozdíl $a-c$ je celé číslo. Ze zadání víme, že i číslo $a+c$ je celé, proto i součet $(a+c)+(a-c)=2a$ je celé číslo. Dvojnásobek každého čísla v množině M tudíž musí být celé číslo, a proto množina M nemůže obsahovat žádné iracionální číslo.

Jiné řešení. Část a) vyřešíme stejně jako v předchozím řešení.

Připusťme, že se v množině M najde iracionální číslo a, a označme α, $0<\alpha<1$, jeho zlomkovou část. Všechna ostatní čísla z množiny M (a takových je tam 2 013) musejí mít zlomkovou část $1-\alpha$, neboť součet každého z nich s číslem a dává celé číslo. Ovšem součet každých dvou čísel s kladnou zlomkovou částí $1-\alpha$ rovněž musí dát celé číslo. To je možné jedině v případě, kdy $1-\alpha=1/2$ neboli $\alpha=1/2$, což je ovšem ve sporu s tím, že číslo a je iracionální. Množina M, která by obsahovala iracionální číslo, tudíž neexistuje.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení vyhovující množiny pro část a) udělte 2 body. Za zjištění, že i rozdíl dvou čísel z množiny M je celé číslo, udělte 2 body. Za korektní dokončení části b) udělte zbylé 2 body. V případě, že student postupuje podle druhého řešení, v části b) získává 2 body za zjištění, že všechna ostatní čísla mají stejnou zlomkovou část, a zbývající 2 body za zjištění, že tato necelá část může být jedině $1/2$. Čtyři body udělte i za přímý důkaz silnějšího tvrzení, že každé číslo z M je buď celé, nebo má zlomkovou část rovnu $1/2$.

3. V daném trojúhelníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vepsané kružnice s jeho stranami a $x=|AY|=|AZ|$, $y=|BX|=|BZ|$, $z=|CX|=CY|$ shodné úseky tečen k vepsané kružnici z jednotlivých vrcholů (obr. 1). Označíme-li obvyklým



Obr. 1

způsobem a, b, c délky jednotlivých stran, platí

$$a=y+z, \quad b=z+x, \quad c=x+y.$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme (pomocí s jako obvykle značíme poloviční obvod trojúhelníku)

$$2s=a+b+c=2x+2y+2z,$$

takže nám vyjde

$$x+y+z=s, \quad x=s-a, \quad y=s-b, \quad z=s-c. \tag{1}$$

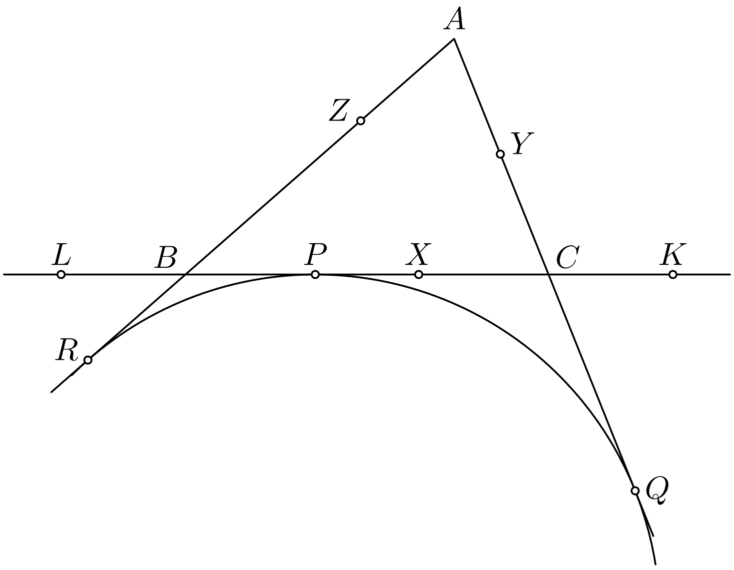
Podívejme se nyní na připsanou kružnici trojúhelníku ABC, jež se dotýká jeho strany BC v bodě P a polopřímek AB a AC v bodech R a Q (obr. 2). Ze shodnosti úseků příslušných tečen k této kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkud vychází

$$\begin{aligned} 2|AR| = |AR| + |AQ| &= |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ &= |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s \end{aligned}$$

neboli $|AR| = |AQ| = s$. Z této rovnosti ovšem plyne, že $|BP| = |BR| = s - c$, což je podle (1) zároveň délka z úsečky CX, tedy $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X jsou souměrně sdruženy podle středu úsečky BC.



Obr. 2

Analogicky bychom odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pro body dotyku K a L kružnic připsaných stranám CA a AB (obr. 2) trojúhelníku ABC s přímkou a. Z těchto posledních rovností ovšem vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, tudíž i body K a L jsou souměrně sdruženy podle středu úsečky BC.

Body K a L jsou známy (ze tří daných bodů na přímce jsou ty dva krajní), známe tedy i střed S strany BC (je to střed úsečky KL) a bod X najdeme jako obraz třetího daného bodu P ve středové souměrnosti podle středu S.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za určení středu strany BC pomocí souměrně sdružených bodů dotyku kružnic připsaných ostatním dvěma stranám. Tři body rovněž udělte za poznatek, že také body dotyku připsané a vepsané kružnice na jedné straně trojúhelníku jsou souměrně sdruženy podle středu strany. Za pouhé odvození všech vzdáleností bodů dotyku od vrcholů B a C bez nalezení konstrukce udělte 4 body.