63. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz $V = ab + bc + cd + da$, splňují-li reálná čísla a, b, c, d dvojici podmínek

$$2a - 5b + 2c - 5d = 4,$$
$$3a + 4b + 3c + 4d = 6.$$

2. Čísla $1, 2, \ldots, 10$ rozdělte do dvou skupin tak, aby nejmenší společný násobek součinu všech čísel první skupiny a součinu všech čísel druhé skupiny byl co nejmenší. Stačí, když uvedete jedno rozdělení a zdůvodníte, proč má požadovanou vlastnost.

3. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Středem I kružnice trojúhelníku vepsané vedeme rovnoběžky se stranami CA a CB, které protnou přeponu po řadě v bodech X a Y. Ukažte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 23. ledna 2013

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

63. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Pro daný výraz V platí

$$V = a(b+d) + c(b+d) = (a+c)(b+d).$$

Podobně lze upravit i obě dané podmínky:

$$2(a+c) - 5(b+d) = 4 \quad \text{a} \quad 3(a+c) + 4(b+d) = 6. \tag{1}$$

Zvolíme-li tedy substituci $m = a+c$ a $n = b+d$, dostaneme řešením soustavy (1) $m = 2$ a $n = 0$. Pro daný výraz pak platí $V = mn = 0$.

Závěr. Za daných podmínek nabývá výraz V pouze hodnotu 0.

Jiné řešení. Podmínky úlohy si představíme jako soustavu rovnic s neznámými a, b a parametry c, d. Vyřešením této soustavy (sčítací nebo dosazovací metodou) nalezneme $a = 2 - c$, $b = -d$ ($c, d \in \mathbb{R}$) a po dosazení do výrazu V dostáváme

$$V = (2-c)(-d) - dc + cd + d(2-c) = 0.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu z prvního řešení udělte 2 body za rozklad výrazu V na součin, 2 body za úpravu podmínek na soustavu (1), 1 bod za její vyřešení a 1 bod za výpočet hodnoty V.

2. Pro uvažované součiny a a b jistě platí $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a, b je proto dělitelné 2^4, aspoň jedno dělitelné 3^2, aspoň jedno dělitelné 5 a právě jedno dělitelné 7. Pro nejmenší společný násobek n čísel a, b proto platí $n \geqq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040$, přitom rovnost zde nastane, právě když ani jedno z čísel a, b nebude dělitelné žádným z čísel 2^5, 3^3 a 5^2.

Zvolíme-li například $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ a $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5\,040$, bude nejmenší společný násobek obou čísel právě 5 040. Tím je ukázáno, že 5 040 je skutečně nejmenší ze všech možných hodnot n.

I když bylo úlohou nalézt pouze jeden příklad, pro úplnost uvedeme všechna rozdělení s minimální hodnotou $n = 5\,040$:

První skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Najít je není těžké, uvážíme-li, že čísla 1 a 7 můžeme dát do libovolné z obou skupin, zatímco v téže skupině spolu nemohou být 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 pohromadě může být právě jedno ze sudých čísel 2, 6 a 10. Získáme tak pouhá tři základní rozdělení (první tři řádky tabulky), z nichž lze každé čtyřmi způsoby doplnit čísly 1 a 7.

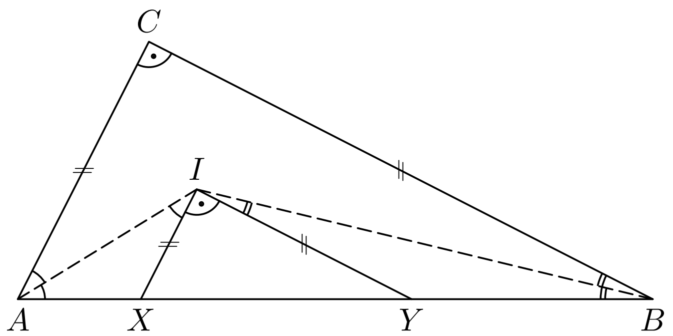
Poznámka. Úlohu lze vyřešit i bez výpočtu součinu $a \cdot b$. Dělitelnost n čísly 3^2, 5 a 7 plyne z jejich přímého zastoupení mezi rozdělovanými čísly, dělitelnost číslem 2^4 ze snadné úvahy o rozdělení všech pěti sudých čísel: není-li číslo 8 ve své skupině jako sudé jediné, je vše jasné, v opačném případě jsou ve stejné skupině čísla 2, 4 a 6 (i 10, ale to už ani nepotřebujeme).

Za správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za rozklad součinu 10! na prvočinitele, 3 body za odhad nejmenšího společného násobku a 2 body za aspoň jedno správné rozdělení čísel (třeba i jen uhodnuté). Za nalezení všech 12 možných rozdělení udělte zvláštní pochvalu!

3. Trojúhelník AIX je rovnoramenný, neboť $|\sphericalangle IAX| = |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle AIX|$. (První rovnost plyne z podmínky, že bod I leží na ose úhlu BAC, druhá pak z vlastnosti střídavých úhlů, obr. 1.) Je tedy $|AX| = |IX|$. Analogicky zjistíme, že $|BY| = |YI|$. Protože úsečky IX a IY svírají (stejně jako s nimi rovnoběžné úsečky CA a CB) pravý úhel, podle Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za zdůvodnění rovností a $|BY| = |YI|$ a $|AX| = |IX|$.