63. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Najděte všechna celá kladná čísla, která nejsou mocninou čísla 2 a která se rovnají součtu trojnásobku svého největšího lichého dělitele a pětinásobku svého nejmenšího lichého dělitele většího než 1.

2. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, kde $|S_1S_2| > r_1+r_2$. Najděte množinu všech bodů X, které neleží na přímce S_1S_2 a mají tu vlastnost, že úsečky S_1X, S_2X protínají po řadě kružnice k_1, k_2 v bodech, jejichž vzdálenosti od přímky S_1S_2 se rovnají.

3. Najděte všechny trojice reálných čísel x, y a z, pro něž platí

$$x(y^2 + 2z^2) = y(z^2 + 2x^2) = z(x^2 + 2y^2).$$

4. Volejbalového turnaje se zúčastnilo šest družstev, každé se utkalo s každým právě jednou. V jednotlivých pěti kolech probíhaly ve stejnou dobu vždy tři zápasy na třech kurtech 1, 2 a 3. Kolik bylo možností pro rozpis takového turnaje? Rozpisem rozumíme tabulku 5×3, v níž na pozici (i, j), kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $j \in \{1, 2, 3\}$, je uvedena dvojice družstev (bez určení pořadí), která se v i-tém kole utkala na kurtu číslo j. Místo dekadického zápisu výsledného čísla můžete uvést jeho rozklad na prvočinitele.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 14. ledna 2014

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

63. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Využijme obvyklý zápis $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ prvočíselného rozkladu hledaného čísla n, ve kterém $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou všechna prvočísla dělící n a exponenty α_i jsou kladná celá čísla. Z podmínky úlohy plyne, že $p_1 = 2$ (jinak by největším lichým dělitelem čísla n bylo samo n a dostali bychom nerovnost $n > 3n$, která nemůže platit) a že $k \geqq 2$ (jinak by n bylo mocninou čísla 2). Největším lichým dělitelem čísla n je zřejmě číslo $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, jeho nejmenším lichým dělitelem (větším než 1) je jistě prvočíslo p_2. Rovnice vyjadřující podmínku úlohy má proto zápis

$$2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 3p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + 5p_2 \quad \text{neboli} \quad \bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5.$$

(V případě $k = 2$ je levá strana upravené rovnice rovna $\bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1}$.) Protože číslo 5 má jediné dva dělitele, platí $2^{\alpha_1} - 3 \in \{1, 5\}$, takže je $\alpha_1 = 2$ nebo $\alpha_1 = 3$.

(i) Případ $\alpha_1 = 2$. Upravená rovnice přejde do tvaru

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5,$$

takže je splněna, právě když je buď $k = 2$, $p_2 = 5$ a $\alpha_2 - 1 = 1$, nebo je $k = 3$, $\alpha_2 - 1 = 0$, $p_3 = 5$ a $\alpha_3 = 1$ — tehdy ovšem prvočíslo p_2 nemůže být libovolné, neboť z $2 < p_2 < p_3 = 5$ plyne $p_2 = 3$. První možnosti tak odpovídá jediné řešení $n = 2^2 5^2 = 100$, druhé možnosti jediné řešení $n = 2^2 3^1 5^1 = 60$.

(ii) Případ $\alpha_1 = 3$. Nyní dostáváme po úpravě rovnici

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 1,$$

která znamená, že $k = 2$ a $\alpha_2 - 1 = 0$ (na prvočíslo p_2 tentokrát žádné omezení kromě nerovnosti $p_2 > 2$ neexistuje). Tomuto případu tak odpovídá nekonečně mnoho řešení $n = 2^3 p_2^1 = 8p_2$.

Odpověď. Všechna vyhovující celá kladná čísla n jsou: $n = 60$, $n = 100$ a $n = 8p$, kde p je libovolné liché prvočíslo.

Poznámka. Celý postup zapíšeme úsporněji, když namísto „úplného“ prvočíselného rozkladu hledaného čísla n využijeme jeho vyjádření $n = 2^\alpha pl$, ve kterém 2^α je nejvyšší mocnina čísla 2, jež dělí n, prvočíslo p je jeho nejmenší lichý prvočinitel a l je (liché) číslo, jež nemá žádného prvočinitele menšího než p (může být i $l = 1$, jinak ovšem $l \geqq p$). Pak je naším úkolem řešit rovnici

$$n = 2^\alpha pl = 3pl + 5p \quad \text{neboli} \quad \bigl(2^\alpha - 3\bigr) l = 5.$$

Odtud máme buď $l = 1$ a $2^\alpha - 3 = 5$, nebo $l = 5$ a $2^\alpha - 3 = 1$. V prvním případě vychází $\alpha = 3$, a tudíž vyhovuje každé $n = 8p$, kde p je libovolné liché prvočíslo; ve druhém případě je $l = 5$ a $\alpha = 2$, takže $n = 20p$, kde ovšem z $5 = l \geqq p$ plyne $p \in \{3, 5\}$, a proto vyhovují pouze čísla $n = 60$ a $n = 100$.

Jiné řešení. Ze zadání plyne, že mezi hledaným číslem n a jeho největším lichým dělitelem L platí nerovnosti $n > 3L$ a $n \leqq 3L + 5L = 8L$. Protože podíl $n : L$ je mocnina čísla 2, z nerovností $3 < n : L \leqq 8$ plyne, že je buď $n = 4L$, nebo $n = 8L$.

Začněme s rozborem případu $n = 8L$. Ze způsobu, jakým jsme odvodili nerovnost $n \leqq 8L$, plyne, že číslo L je nejen největším, ale i nejmenším netriviálním lichým dělitelem čísla n, a proto je prvočíslem. Dostáváme první skupinu hledaných čísel n, jež mají tvar $n = 8L$, kde L je libovolné liché prvočíslo.

V případě $n = 4L$ je nejmenší netriviální lichý dělitel čísla n takové prvočíslo p, jehož pětinásobek je roven číslu $n - 3L = L$. Z rovnosti $5p = L$ máme $n = 4L = 20p$, a proto $5 \mid n$, takže je $p \leqq 5$ neboli $p \in \{3, 5\}$. Odpovídající řešení jsou $n = 60$ a $n = 100$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vhodné vyjádření obou dotyčných dělitelů a sestavení rovnice vyjadřující podmínku úlohy, další 1 bod za úpravu na rovnici mezi jistým součinem a číslem 5. Podle úplnosti upravené rovnice pak udělte zbylé tři body. Při postupu z jiného řešení udělte 1 bod za nerovnost $n > 3L$, 2 body za nerovnost $n \leqq 8L$, 1 bod za důsledek o možných tvarech $n = 4L$, $n = 8L$ a po 1 bodu za jejich rozbor.

2. V první části řešení předpokládejme, že X je libovolný bod, který má požadovanou vlastnost. Zřejmě musí ležet ve vnější oblasti každé z obou kružnic. Body S_1, S_2 a X jsou pak vrcholy trojúhelníku, jehož strany S_1X, S_2X jsou proťaty po řadě kružnicemi k_1, k_2 v bodech Y_1 a Y_2, které leží na téže rovnoběžce s přímkou S_1S_2 (obr. 1). Proto i body Y_1, Y_2, X jsou vrcholy trojúhelníku, který je podobný trojúhelníku S_1S_2X podle věty *uu*, tudíž pro jejich strany platí úměra

$$\frac{|XY_1|}{|XS_1|} = \frac{|XY_2|}{|XS_2|}, \tag{1}$$

kterou díky rovnostem

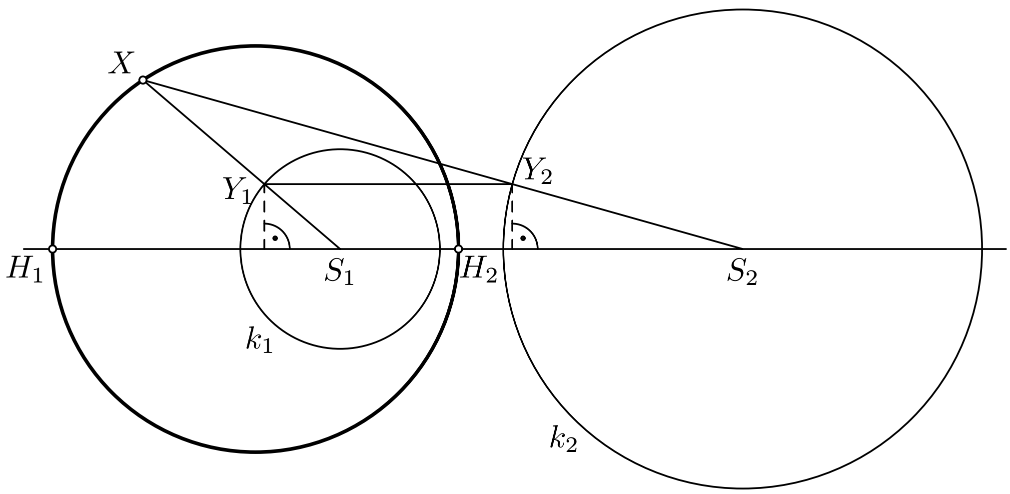
$$|XY_1| = |XS_1| - r_1 \quad \text{a} \quad |XY_2| = |XS_2| - r_2 \tag{2}$$

převedeme na úměru pro délky úseček XS_1 a XS_2:

$$\frac{|XS_1| - r_1}{|XS_1|} = \frac{|XS_2| - r_2}{|XS_2|},$$

takže

$$\frac{|XS_1|}{|XS_2|} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{3}$$



Obr. 1

Množinu bodů v rovině s danými body S_1 a S_2, jež mají vlastnost (3), známe: pro $r_1 = r_2$ je to osa úsečky S_1S_2 a pro $r_1 \neq r_2$ je to *Apolloniova kružnice.* Ta je určena svým průměrem H_1H_2 na přímce S_1S_2, na níž jsou H_1 a H_2 jediné dva body X s vlastností (3). Z té navíc plyne, že jde o středy stejnolehlostí kružnic k_1 a k_2.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že bod X je libovolný bod Apolloniovy kružnice určené rovnicí (3), který je různý od jejích průsečíků H_1, H_2 s přímkou S_1S_2. Vzhledem k předpokladům úlohy leží body H_1, H_2 ve vnější oblasti obou kružnic, takže tam leží i příslušná Apolloniova kružnice, neboť její průměr obsahuje průměr jedné z daných kružnic (té s menším poloměrem) a s průměrem druhé kružnice je disjunktní.

Body S_1, S_2 a X jsou tak vrcholy trojúhelníku, přičemž $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$. Existují tudíž body $Y_1 \in k_1$, $Y_2 \in k_2$ ležící uvnitř stran S_1X, S_2X trojúhelníku S_1S_2X. Proto pro ně také platí rovnosti (2), díky nimž lze přejít tentokrát od rovnice (3) k rovnici (1). Její platnost znamená, že trojúhelníky S_1S_2X a Y_1Y_2X jsou podobné podle věty *sus*, a proto jsou úsečky S_1S_2 a Y_1Y_2 rovnoběžné. Body Y_1, Y_2 tak mají od přímky S_1S_2 stejné vzdálenosti, což dokazuje požadovanou vlastnost bodu X.

Odpověď: Hledanou množinou bodů X je Apolloniova kružnice určená rovnicí (3), z níž jsou vyloučeny oba její průsečíky s přímkou S_1S_2. V případě $r_1 = r_2$ je hledanou množinou osa úsečky S_1S_2 bez jejího středu.

Poznámka. Potřebnou vlastnost Apolloniovy kružnice lze odvodit přímo z rovnosti (3). Z rovnosti, která předchází rovnost (3) a která je s ní ve skutečnosti ekvivalentní, pro libovolný takový bod X plyne, že oba výrazy $|XS_1| - r_1$ a $|XS_2| - r_2$ mají stejné znaménko. A protože podle předpokladů úlohy je

$$(|XS_1| - r_1) + (|XS_2| - r_2) > |S_1S_2| - (r_1 + r_2) > 0,$$

je $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$, což znamená, že nalezená Apolloniova kružnice leží v průniku vnějších oblastí obou daných kružnic.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za 4 body za důkaz, že každý vyhovující bod X leží na Apolloniově kružnici a 2 body za obrácené tvrzení. Ze zadání úlohy je ihned patrné, že všechny vyhovující body X musejí ležet v průniku vnějších oblastí obou kružnic k_1 a k_2. Poznatek, že v tomto průniku leží i nalezená Apolloniova kružnice, by neměl v úplném řešení chybět. Za absenci tohoto poznatku strhněte 1 bod. Rovněž strhněte 1 bod, pokud řešitel v průběhu řešení nebo v závěru opomene situaci, kdy $r_1 = r_2$.

3. Je-li např. $x = 0$, dostáváme soustavu $0 = yz^2 = 2y^2z$, takže i jedna z hodnot y, z je nulová a druhá může být libovolná. Podobně vyřešíme i případy $y = 0$ a $z = 0$. Dostáváme tak tři skupiny řešení $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$ a $(0, 0, t)$, kde t je libovolné reálné číslo. Všechna ostatní řešení už splňují podmínku $xyz \neq 0$, jejíž platnost budeme ve zbytku řešení předpokládat.

Úpravou rovnice $x\bigl(y^2 + 2z^2\bigr) = y\bigl(z^2 + 2x^2\bigr)$ dostaneme $(2x - y)(z^2 - xy) = 0$. Rozlišíme tedy, který ze dvou činitelů je roven nule.

(i) $2x - y = 0$. Z původní soustavy po dosazení $y = 2x$ zůstane jediná rovnice

$$2x(2x^2 + z^2) = 9x^2z,$$

odkud po dělení číslem $x \neq 0$ dostáváme

$$4x^2 + 2z^2 - 9xz = 0 \quad \text{neboli} \quad (x - 2z)(4x - z) = 0.$$

Případu (i) tedy odpovídají skupiny řešení $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

(ii) $z^2 - xy = 0$. Částečným dosazením $z^2 = xy$ dostaneme jedinou rovnici

$$xy(2x + y) = z(x^2 + 2y^2),$$

která je (díky tomu, že $x^2 + 2y^2 > 0$) ekvivalentní s rovnicí

$$z = \frac{xy(2x + y)}{x^2 + 2y^2}.$$

Nyní ovšem musíme zjistit, kdy takové z splňuje podmínku $z^2 = xy$, jež po dosazení nalezeného vzorce pro z získává tvar

$$\frac{x^2y^2(2x + y)^2}{(x^2 + 2y^2)^2} = xy.$$

Po vydělení číslem $xy \neq 0$ a odstranění zlomku dostaneme podmínku

$$xy(2x + y)^2 = (x^2 + 2y^2)^2 \quad \text{neboli} \quad (4y - x)(x^3 - y^3) = 0.$$

Poslední rovnost platí, právě když buď $x = 4y$, nebo $x^3 = y^3$, tj. $x = y$.[1] Po dosazení do vzorce pro z dostaneme v prvním případě $z = 2y$, ve druhém $z = x$. Případu (ii) tedy odpovídají skupiny řešení $(4t, t, 2t)$ a (t, t, t), kde t je libovolné reálné číslo.

Odpověď. Všechna řešení dané soustavy jsou $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$, (t, t, t), $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Poznámka. Ukažme způsob, jak se v podaném řešení vyhnout rozboru náročnějšího případu (ii). Díky cyklické symetrii má zadaná soustava za důsledek nejen první z následujících tří rovnic (kterou jsme výše odvodili), ale také další dvě analogické rovnice

$$(2x - y)(z^2 - xy) = 0, \quad (2y - z)(x^2 - yz) = 0, \quad (2z - x)(y^2 - zx) = 0. \tag{1}$$

Případ $2x - y = 0$ jsme výše rozebrali, případy $2y - z = 0$ a $2z - x$ jsou analogické a vypsáním řešení pro tyto tři případy dostaneme všechna řešení uvedená v Odpovědi s výjimkou (t, t, t). Nenastane-li žádný z těchto tří případů, musejí být splněny rovnice

$$z^2 - xy = x^2 - yz = y^2 - zx = 0. \tag{2}$$

Ukažme, že je v oboru reálných čísel splňují pouze trojice $(x, y, z) = (t, t, t)$. To je snadný důsledek algebraické identity

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(z^2 - xy) + 2(x^2 - yz) + 2(y^2 - zx),$$

jejíž pravá strana je podle (2) rovna nule, takže se rovná nule i základ každé ze tří druhých mocnin na levé straně (jež by jinak měla kladnou hodnotu). Dodejme, že soustavu (2) lze vyřešit i kratší úvahou: platí-li rovnice (2), mají výrazy x^3, y^3, z^3 tutéž hodnotu xyz, a tak platí $x = y = z$ podle poznámky pod čarou.

[1] Poslední závěr platí díky tomu, že funkce $x \mapsto x^3$ je v reálném oboru rostoucí, a tedy prostá.

Jiné řešení. Nebudeme opakovat úvodní úvahu původního řešení a rovnou budeme hledat jen ta řešení, jež splňují podmínku $xyz \neq 0$.

Po vydělení výrazů v zadané soustavě nenulovým číslem xyz dostaneme

$$\frac{y}{z} + \frac{2z}{y} = \frac{z}{x} + \frac{2x}{z} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}, \tag{3}$$

což je rovnost tří hodnot téže funkce $f(s) = s + 2/s$ v nenulových bodech $s_1 = y/z$, $s_2 = z/x$ a $s_3 = x/y$. Zjistíme proto, kdy pro nenulová čísla s a t platí $f(s) = f(t)$. Z vyjádření

$$f(s) - f(t) = s + \frac{2}{s} - t - \frac{2}{t} = \frac{(s-t)(st-2)}{st}$$

vidíme, že kýžená situace nastane, jen když $s = t$ nebo $st = 2$.

Soustava rovnic (3) je proto splněna, právě když pro zavedená čísla s_1, s_2, s_3 platí: každé dvě z nich se rovnají nebo je součin obou roven číslu 2. Pokud je ovšem takový součin roven 2, třetí číslo je díky rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ rovno $\frac{1}{2}$, a první dvě čísla (o součinu 2) tudíž leží v množině $\{\frac{1}{2}, 4\}$, takže jsou různá, a proto (s_1, s_2, s_3) je některou permutací trojice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Je snadné ověřit, že těmto (celkem třem) permutacím odpovídají řešení $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$ původní soustavy (nebudeme to zde rozepisovat). Ještě snazší je dokončení zbylého případu $s_1 = s_2 = s_3$: díky rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ je společná hodnota čísel s_i rovna 1 a odpovídající řešení zřejmě jsou (t, t, t) (opět je t libovolné reálné číslo).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za odvození součinového tvaru aspoň jedné z rovnic (1) nebo za úpravu soustavy do tvaru (3) doplněnou zmínkou o souvislosti s funkcí $f(s) = s + 2/s$.

4. Permutace kurtů v jednotlivých kolech i permutace samotných kol posoudíme nakonec; nejdříve *družstva pevně označíme čísly* 1, 2, 3, 4, 5, 6 a podle toho *pětici kol libovolného rozpisu jednoznačně přeuspořádáme.* Za kola 1 a 2 prohlásíme kola po řadě s páry $(1, 2)$ a $(1, 3)$; je-li přitom v kole 1 pár $(3, a)$ a v kole 2 pár $(2, b)$, jsou a, b dvě *různá* čísla z $\{4, 5, 6\}$, jinak by nám totiž pro třetí utkání v každém z obou kol zbyla táž dvojice. Za kola 3, 4 a 5 pak prohlásíme kola po řadě s páry $(1, a)$, $(1, b)$ a $(1, c)$, kde $c \in \{4, 5, 6\} \setminus \{a, b\}$. Máme tedy jednoznačně určeno pořadí všech kol s neúplným rozpisem

$$\begin{array}{lll}
1: & (1,2), & (3,a), \\
2: & (1,3), & (2,b), \\
3: & (1,a), & \\
4: & (1,b), & \\
5: & (1,c), &
\end{array}$$

který lze zřejmě jediným způsobem doplnit do úplného rozpisu:

$$\begin{array}{llll}
1: & (1,2), & (3,a), & (b,c), \\
2: & (1,3), & (2,b), & (a,c), \\
3: & (1,a), & (2,c), & (3,b), \\
4: & (1,b), & (2,a), & (3,c), \\
5: & (1,c), & (2,3), & (a,b).
\end{array}$$

Protože (a, b, c) je libovolná permutace trojice $(4, 5, 6)$, je počet takto zapsaných rozpisů právě $3! = 6$, v každém takovém rozpisu pak lze kola uspořádat $5!$ způsoby a nakonec v každém z pěti kol přiřadit párům kurty právě $3! = 6$ způsoby. Hledaný počet je tedy roven číslu

$$6 \cdot 5! \cdot 6^5 = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720.$$

Jiné řešení. Označme družstva čísly 1, 2, 3, 4, 5 a 6 a sestavme nejprve neuspořádaný rozpis turnaje tak, že jednotlivá kola „očíslujeme" soupeři družstva číslo 1 a prozkoumáme, kolika způsoby lze k těmto dvojicím doplnit utkání družstva číslo 2, přičemž soupeře dvojky vybíráme už jen ze čtyřprvkové množiny $\{3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{array}{lll} 1\colon & (1,2), & \\ 2\colon & (1,3), & (2,a), \\ 3\colon & (1,4), & (2,b), \\ 4\colon & (1,5), & (2,c), \\ 5\colon & (1,6), & (2,d). \end{array}$$

Na doplňované páry $(2,a)$, $(2,b)$, $(2,c)$, $(2,d)$ máme následující omezení:

- ▷ Družstvo 2 nemůže mít v žádném kole stejného soupeře jako družstvo 1.
- ▷ Obě družstva 1 a 2 nemohou mít ve dvou různých kolech střídavě tytéž soupeře, protože pak by nám ke třetímu utkání v obou kolech zbyla táž dvojice.

Při splnění těchto dvou podmínek je pak zřejmě jednoznačně určena zbývající dvojice v každém z kol, v nichž spolu nehrají 1 s 2. Po jejich určení nám zůstanou právě dvě dvojice soupeřů, jež se musejí utkat v kole, v němž spolu hrají 1 a 2.

Zbývá tedy jen určit počet permutací čtyřprvkové množiny $\{3, 4, 5, 6\}$ soupeřů družstva 2, jež splňují uvedené dvě podmínky.

Počet permutací (a, b, c, d) splňujících první podmínku, tedy nerovnosti $a \neq 3$, $b \neq 4$, $c \neq 5$ a $d \neq 6$, najdeme metodou inkluze a exkluze: vhodných permutací je tak

$$4! - \left(4 \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + 4 - 1\right) = 9.$$

Mezi nimi jsou právě tři permutace (a, b, c, d), které nevyhovují druhé podmínce: jde zřejmě o permutace $(4, 3, 6, 5)$, $(5, 6, 3, 4)$ a $(6, 5, 4, 3)$ a žádné jiné.

Všech možných rozpisů je tak celkem 6, v každém kole máme ovšem $3! = 6$ možností, jak přiřadit párům soupeřů jednotlivé kurty, a celkem $5!$ možných uspořádání jednotlivých kol, dohromady tudíž

$$6 \cdot 6^5 \cdot 5! = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720 \text{ možností.}$$

Poznámka. Namísto užití principu inkluze a exkluze můžeme všechny permutace (a, b, c, d) vyhovující oběma podmínkám vhodným systematickým postupem přímo najít a vypsat. Jde o permutace $(4, 5, 6, 3)$, $(4, 6, 3, 5)$, $(5, 3, 6, 4)$, $(5, 6, 4, 3)$, $(6, 3, 4, 5)$, $(6, 5, 3, 4)$.

Naopak k počtu permutací vyhovujících první, ne však druhé podmínce lze dospět následující úvahou: máme šest možností, jak vybrat prostřídávanou dvojici soupeřů, přitom takové dvojice jsou v každé z počítaných permutací zřejmě dvě.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Udělte 2 až 3 body, pokud řešitel popíše nějaký smysluplný způsob, jak vytvořit všechny možné rozpisy pro konání turnaje, i když se mu nakonec nepodaří z toho odvodit správný počet možností.