63. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$x^2 + 6(y + z) = 85,$$
$$y^2 + 6(z + x) = 85,$$
$$z^2 + 6(x + y) = 85.$$

2. Jeník napsal na tabuli několik různých prvočísel (aspoň tři). Když sečetl libovolná dvě z nich a tento součet zmenšil o 7, bylo výsledné číslo mezi napsanými. Která čísla mohla na tabuli být?

3. Nad stranami BC a AB ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny polokružnice k a l. Označme postupně D a E průsečíky výšek z vrcholů A a C s polokružnicemi k a l (výškami rozumíme přímky). Dokažte, že platí $|BE| = |BD|$.

4. V každém políčku tabulky 8×8 je napsáno jedno nezáporné celé číslo tak, že každá dvě čísla, která jsou na políčkách souměrně sdružených podle jedné či druhé úhlopříčky, jsou stejná. Součet všech 64 čísel je 1 000, součet 16 čísel na úhlopříčkách je 200. Ukažte, že součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky je nejvýše 300. Platí stejný závěr i pro číslo 299?

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 8. dubna 2014

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

63. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Odečtením druhé rovnice od první a třetí od druhé dostaneme dvě rovnice

$$(x-y)(x+y-6)=0,$$
$$(y-z)(y+z-6)=0,$$

které spolu s libovolnou ze tří daných rovnic tvoří soustavu s danou soustavou ekvivalentní. Pro splnění získaných dvou rovnic pak máme čtyři možnosti:

Pokud $x=y=z$, vyjde dosazením do kterékoli ze zadaných rovnic $y^2+12y-85=0$ a odtud $y=5$ nebo $y=-17$.

Pokud $x=y$, $z=6-y$, dostaneme z první zadané rovnice $y^2+36=85$, a tedy $y=7$ nebo $y=-7$.

Pokud $x=6-y$, $z=y$, dostaneme z poslední zadané rovnice opět $y^2+36=85$, a tedy $y=7$ nebo $y=-7$.

Pokud $x=z=6-y$, dostaneme z druhé zadané rovnice $y^2+6(12-2y)=85$ neboli $y^2-12y-13=0$ a odtud $y=-1$ nebo $y=13$.

Odpověď. Soustava rovnic má osm řešení, a to $(5,5,5)$, $(-17,-17,-17)$, $(7,7,-1)$, $(-7,-7,13)$, $(-1,7,7)$, $(13,-7,-7)$, $(7,-1,7)$, $(-7,13,-7)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uhodnutí řešení $x=y=z\in\{5,-17\}$ udělte 2 body, anebo jen 1 bod, pokud řešitel najde pouze jedno z těchto řešení. Rozebrání ostatních dvou možností odměňte dohromady 2 body (je to stejná kvadratická rovnice) a poslední možnost $x=z=6-y$ ohodnoťte také dvěma body. Pokud student rozebere všechny čtyři případy, ale zapomene na řešení, která vzniknou záměnou pořadí, udělte pouze 5 bodů.

2. Označme prvočísla napsaná na tabuli jako $p_1<p_2<\ldots<p_k$. Z těchto čísel je díky předpokladu $k\geqq 3$ možné vytvořit k různých čísel

$$p_1+p_2-7<p_1+p_3-7<\ldots<p_1+p_k-7<p_{k-1}+p_k-7, \tag{1}$$

která všechna musejí být mezi čísly napsanými na tabuli. Proto se postupně rovnají prvočíslům $p_1<p_2<\ldots<p_k$. Přesněji, nejmenší z nich se rovná p_1, tj. $p_1+p_2-7=p_1$, a tedy $p_2=7$. Následně pro druhé nejmenší číslo v nerovnicích (1) platí $p_1+p_3-7=$ $=p_2=7$, a tedy $p_1+p_3=14$. Pro prvočíslo $p_1<p_2=7$ máme pouze tři možnosti $p_1\in\{2,3,5\}$, kterým odpovídají hodnoty $p_3=14-p_1\in\{12,11,9\}$, z nichž pouze $p_3=11$ je prvočíslo, takže $p_1=3$. Předpokládejme, že na tabuli je napsáno ještě další prvočíslo p_4. Pak třetí nejmenší číslo v nerovnicích (1) musí být $11=p_3=p_1+p_4-7$, z čehož vzhledem k rovnosti $p_1=3$ plyne $p_4=15$, což prvočíslo není.

Odpověď. Na tabuli mohla být pouze tři prvočísla 3, 7 a 11.

Dodejme, že závěr $k=3$ lze jinak zdůvodnit poznámkou, že stejnou k-tici prvočísel ve skupině (1) musíme dostat i tehdy, zaměníme-li poslední z čísel za p_2+p_k-7; musí tudíž platit $p_{k-1}=p_2$ neboli $k=3$.

Jiné řešení. Označme prvočísla napsaná na tabuli jako $p_1<p_2<\ldots<p_k$. Pokud si Jeník vybere dvě nejmenší a dvě největší prvočísla, jejich součet zmenšený o 7 je na tabuli, a proto $p_1+p_2-7\geqq p_1$ a $p_k+p_{k-1}-7\leqq p_k$, z čehož plyne $7\leqq p_2<$ $<p_{k-1}\leqq 7$. Abychom nedostali spor, musí být $k\leqq 3$. Podle zadání jsou na tabuli

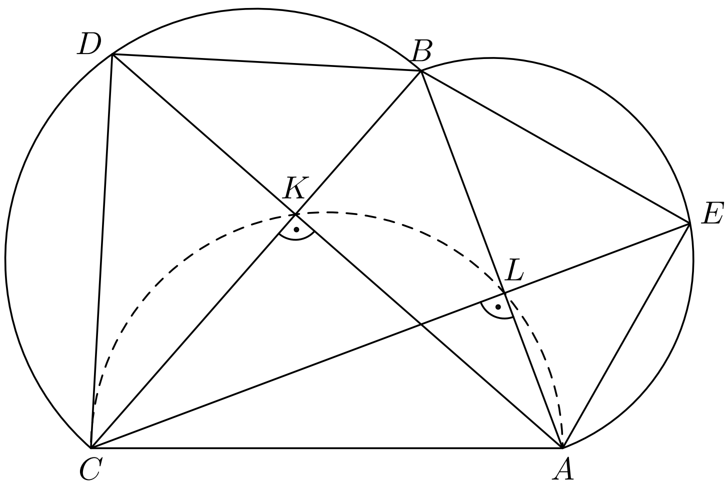
alespoň tři prvočísla, tudíž na tabuli jsou přesně tři prvočísla $p_1 < p_2 < p_3$. Protože $p_1 + p_2 < p_1 + p_3 < p_2 + p_3$, musí platit

$$p_1 + p_2 - 7 = p_1, \qquad p_1 + p_3 - 7 = p_2, \qquad p_2 + p_3 - 7 = p_3.$$

Z první (a poslední) rovnice vychází $p_2 = 7$ a z prostřední $p_1 + p_3 = 14$, přičemž $p_1 < 7 = p_2$. Vyzkoušením všech možností $p_1 \in \{2, 3, 5\}$ dostaneme jediné řešení $p_1 = 3$ a $p_3 = 11$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, za pouhé vyřešení situace s třemi prvočísly udělte 3 body. Další 3 body udělte, pokud student prokáže, že na tabuli mohla být nejvýše 3 prvočísla. Za uhodnutí řešení $\{3, 7, 11\}$ udělte 2 body.

3. Označme paty výšek z vrcholů A a C na strany daného trojúhelníku postupně K a L (obr. 1). Z Eukleidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku BCD víme, že $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC|$. Podobně pro pravoúhlý trojúhelník ABE máme $|BE|^2 = |BL| \cdot |BA|$. Trojúhelníky ACK a ACL jsou pravoúhlé s přeponou AC, a proto body K a L leží na kružnici s průměrem AC. Mocnost bodu B k této kružnici je $|BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA|$, a tak spojením s důsledky Eukleidových vět dostáváme $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA| = |BE|^2$, a tedy $|BE| = |BD|$.



Obr. 1

Jiné řešení. Při označení pat výšek jako v prvním řešení (obr. 1) z Pythagorových vět v trojúhelnících BAK, BDK, CAK a CDK dostaneme

$$\begin{aligned} |BD|^2 - |BA|^2 &= (|DK|^2 + |BK|^2) - (|AK|^2 + |BK|^2) = |DK|^2 - |AK|^2 = \\ &= (|DK|^2 + |CK|^2) - (|AK|^2 + |CK|^2) = |CD|^2 - |CA|^2. \end{aligned}$$

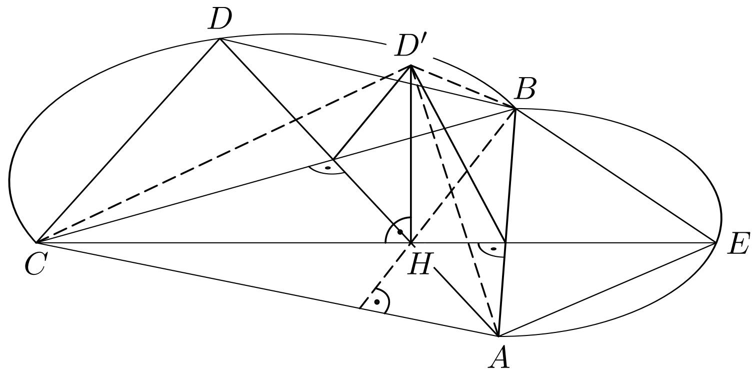
Navíc z pravoúhlého trojúhelníku BCD víme, že $|CD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$. Dosazením do předchozí rovnosti po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |BA|^2 + |CD|^2 - |CA|^2 = |BA|^2 + (|BC|^2 - |BD|^2) - |CA|^2, \\ 2|BD|^2 &= |BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2, \\ |BD| &= \sqrt{\frac{|BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Velikost $|BE|$ dostaneme ze symetrie záměnou bodů $C \leftrightarrow A$ a $D \leftrightarrow E$, takže

$$|BE| = \sqrt{\frac{|BC|^2 + |BA|^2 - |AC|^2}{2}} = |BD|.$$

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Otočme trojúhelník BCD v prostoru okolo přímky BC do polohy BCD' tak, aby rovina BHD' byla kolmá k rovině ABC, tedy tak, aby kolmý průmět přímky BD' do roviny ABC splýval s výškou z vrcholu B v trojúhelníku ABC (obr. 2). Protože DA je výškou trojúhelníku ABC, je rovina AHD' kolmá k rovině ABC, takže přímka HD' (průsečnice rovin BHD' a AHD') je kolmá k rovině ABC.



Obr. 2

Přímka BD' je kolmá ke přímce AC i na přímku CD' (úhel $BD'C$ se shoduje s pravým úhlem BDC nad průměrem BC) — je tedy kolmá k rovině ACD'. Pak je ovšem pravý i úhel $AD'B$. Bod D' leží v rovině CHD' kolmé k rovině ABC, přičemž přímka $CH = CE$ je výškou trojúhelníku ABC. Přesně tyto vlastnosti má i bod E' trojúhelníku BAE', který vznikne otočením pravoúhlého trojúhelníku BAE kolem přímky BA tak, aby rovina BHE' byla kolmá k rovině ABC. Body D' a E' tudíž splývají, a proto $|BD| = |BD'| = |BE'| = |BE|$.

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC a K, M a L paty výšek postupně z vrcholů A, B a C. Stejně jako v druhém řešení opakovaným využitím Pythagorovy věty dostáváme

$$\begin{aligned}
&|BD|^2 - |BE|^2 = \\
&\quad = (|BD|^2 - |BH|^2) + (|BH|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |BK|^2) - (|BK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |BL|^2) - (|BL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|KD|^2 - |HK|^2) + (|HL|^2 - |LE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |CK|^2) - (|CK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |AL|^2) - (|AL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|CD|^2 - |CH|^2) + (|AH|^2 - |AE|^2) = \\
&\quad = |CD|^2 + |AH|^2 - |CH|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AM|^2 + |MH|^2) - (|MH|^2 + |CM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + |AM|^2 - |CM|^2 - |AE|^2 =
\end{aligned}$$

$$= |CD|^2 + (|AB|^2 - |BM|^2) - (|BC|^2 - |BM|^2) - |AE|^2 =$$
$$= (|BC|^2 - |BD|^2) + |AB|^2 - |BC|^2 - (|AB|^2 - |BE|^2) =$$
$$= -|BD|^2 + |BE|^2,$$

odkud plyne $2|BD|^2 = 2|BE|^2$, a tudíž $|BE| = |BD|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud student postupuje podle prvního řešení, tak za využití Eukleidovy věty o odvěsně udělte 3 body a za využití mocnosti bodu ke kružnici nad průměrem BC rovněž 3 body.

4. Řádky a sloupce uvažované tabulky očíslujme shora dolů, resp. zleva doprava čísly $1, 2, \ldots, 8$.

Nejprve ukážeme, že součet čísel v každém řádku a sloupci je nejvýše 300. Uvědomme si, že složením obou souměrností podle úhlopříček vznikne středová souměrnost podle středu dané tabulky. To tedy znamená, že pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ budou řádky i, $9 - i$ a sloupce i, $9 - i$ obsahovat čtyři shodné osmice čísel. Součet dvou diagonálních čísel z této osmice je nejvýše $200 : 2 = 100$, protože každé z těchto čísel je v součtu všech 16 (nezáporných) čísel na obou úhlopříčkách započítáno dvakrát. Součet šesti čísel z uvažované osmice, jež neleží na žádné z úhlopříček, je nejvýše $800 : 4 = 200$, protože v součtu $1\,000 - 200 = 800$ všech 48 nediagonálních (nezáporných) čísel je každé číslo započteno čtyřikrát. Proto součet všech osmi čísel v každém řádku i sloupci nepřevyšuje $100 + 200 = 300$.

Zbývá najít příklad tabulky, pro kterou závěr s číslem 299 neplatí. Pokud zapíšeme číslo 50 do čtyř rohových polí, číslo 100 do osmi polí krajních řádků a sloupců, která sousedí s rohovými políčky, a nuly do ostatních políček, dostaneme vyhovující tabulku, která má v krajních řádcích a sloupcích součet 300, tedy více než posuzovaných 299. (Jiný z četných protipříkladů je popsán v závěru druhého řešení.)

Jiné řešení: Označme si některá čísla v tabulce podle následujícího schématu vlevo. Těmito čísly již umíme díky symetrii podle úhlopříček vyplnit celou tabulku (schéma vpravo):

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	
		a_3	b_6	c_6	d_3		
			a_4	d_4			

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
b_1	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	c_1
b_2	b_4	a_3	b_6	c_6	d_3	c_4	c_2
b_3	b_5	b_6	a_4	d_4	c_6	c_5	c_3
c_3	c_5	c_6	d_4	a_4	b_6	b_5	b_3
c_2	c_4	d_3	c_6	b_6	a_3	b_4	b_2
c_1	d_2	c_4	c_5	b_5	b_4	a_2	b_1
d_1	c_1	c_2	c_3	b_3	b_2	b_1	a_1

Označme součty čísel v těchto skupinách odpovídajícím velkým písmenem, tj. $A = a_1 + \ldots + a_4$, $B = b_1 + \ldots + b_6$, $C = c_1 + \ldots + c_6$, $D = d_1 + \ldots + d_4$. Ze zadání tak máme $2(A+D) = 200$ a $2(A+D)+4(B+C) = 1\,000$, z čehož úpravou dostaneme $A+D = 100$ a $B + C = 200$.

Vzhledem k symetrii čísel v tabulce nyní stačí ukázat, že tvrzení platí pro každý z prvních čtyř řádků. Všechna čísla jsou nezáporná a v jednom řádku se nevyskytují dvě stejně označená čísla, proto jejich součet je nejvýše

$$a_1 + \ldots + a_4 + b_1 + \ldots + b_6 + c_1 + \ldots + c_6 + d_1 + \ldots + d_4 = A + B + C + D = 300.$$

Vyhovující tabulku, pro kterou závěr s číslem 299 neplatí, dostaneme například pro hodnoty $a_1 = 100$, $b_1 = 200$ a ostatní čísla nulová.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Nalezení protipříkladu pro číslo 299 odměňte 2 body.

Pokud student postupuje podle prvního řešení, udělte 2 body za ohraničení součtu dvou diagonálních čísel v jednom řádku nebo sloupci číslem 100. Zdůvodnění, že každé z nediagonálních čísel se v tabulce vyskytuje právě čtyřikrát a že jejich součet v jedné osmici je nejvýše 200, ohodnoťte dalšími 2 body.

Pokud postupuje student podle druhého řešení, udělte 1 bod za rozdělení čísel podle souměrnosti na oblasti A, B, C a D a za výpočet $A + D = 100$ a $B + C = 200$ udělte další bod. Zbylé dva body udělte za podrobné zdůvodnění, proč není možné, aby se v jednom řádku nebo sloupci vyskytovala dvě čísla z jedné oblasti B, resp. C.