63. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru $63 : 36$.

2. Šachového turnaje se zúčastnilo 5 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Pořadí hráčů v turnaji se určuje podle počtu získaných bodů. Jediným dalším kritériem rozhodujícím o konečném umístění hráčů v případě rovnosti bodů je počet výher (kdo má více výher, je na tom v umístění lépe). V turnaji získali všichni hráči stejný počet bodů. Vojta porazil Petra a o první místo se dělil s Tomášem. Jak dopadla partie mezi Petrem a Martinem?

3. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2 + ab \leqq ac + bc$.

4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s bodem E uvnitř strany AB tak, že platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB|$. Obsahy trojúhelníků AED a CEB jsou po řadě $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah trojúhelníku ECD.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 8. dubna 2014

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Sestavíme a vyřešíme rovnici pro neznámé číslice a, b, c, kterou díky tvaru zadaných čísel můžeme zapsat rovnou pro jedinou neznámou $x = 100a + 10b + c$:

$$\begin{aligned}\frac{60\,000 + 10x + 3}{30\,000 + 10x + 6} &= \frac{63}{36} = \frac{7}{4},\\ 40x + 240\,012 &= 70x + 210\,042,\\ 30x &= 29\,970,\\ x &= 999.\end{aligned}$$

Závěr. Nalezenému x odpovídá trojice číslic $a = b = c = 9$. Úloha má jediné řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za sestavení správné rovnice a 3 body za její vyřešení a závěr. Za pouhé uhodnutí výsledku (bez vysvětlení, že je jediný možný) udělte 1 bod.

2. Každý hráč odehrál po jedné partii se zbývajícími čtyřmi. Bylo tedy sehráno celkem $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ partií, takže každý hráč získal právě 2 body. Jsou jen tři možnosti, jak získat odehráním čtyř partií 2 body, a podle toho obsahovala celková tabulka nejvýše tři rovnocenné skupiny hráčů. Tyto skupiny, A, B a C, uvádíme v pořadí, v němž by se v konečné tabulce umístily:

Skupina A obsahuje všechny hráče, kteří mají po dvou výhrách a dvou prohrách. Skupina B sestává z hráčů s jednou výhrou, jednou prohrou a dvěma remízami. Skupina C obsahuje hráče se čtyřmi remízami.

Vojta a Tomáš jsou jediní vítězové, proto nepatří do skupiny C. Nepatří ani do skupiny B, protože by s nimi museli všichni tři hráči ze skupiny C s horším výsledkem remizovat (a každý hráč skupiny B má jen po dvou remízách).

Odtud plyne, že Vojta a Tomáš mají po dvou výhrách a dvou prohrách a skupina C je prázdná. Zbývající tři hráči tak mají po jedné výhře, jedné prohře a dvou remízách, které museli uhrát navzájem mezi sebou.

Závěr. Petr a Martin spolu remizovali.

Jiné řešení. Využijeme (nadbytečného) údaje, že Vojta porazil Petra: Kdyby měli Vojta a Tomáš po jedné výhře, jedné prohře a dvou remízách, musel by i Petr patřit mezi vítěze turnaje. Jediný v pořadí nižší celkový výsledek jsou totiž čtyři remízy, Petr však jednu partii prohrál, a tak musel i jednu vyhrát. Vojta a Tomáš mají proto po dvou výhrách a dvou prohrách. Jestliže Petr prohrál s Vojtou, musel porazit Tomáše. (Nemohl mít dvě porážky, protože byl v pořadí níže než Tomáš a Vojta. Ani nemohl s Tomášem, který žádnou remízu nemá, remizovat.) Potřebný druhý bod získal dvěma remízami — s Martinem a nejmenovaným pátým hráčem.

Závěr. Petr a Martin spolu remizovali.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

3. Vzhledem k podmínce $c^2 + ab = a^2 + b^2$ stačí dokázat nerovnost $a^2 + b^2 \leqq ac + bc$. Ta je ekvivalentní se vztahem $(a^2 + b^2)^2 \leqq c^2(a + b)^2$, který vzhledem k dané podmínce přepíšeme do tvaru

$$(a^2 + b^2)^2 \leqq (a^2 + b^2 - ab)(a + b)^2. \tag{1}$$

Po roznásobení a sloučení stejných členů zjistíme, že máme dokázat nerovnost

$$0 \leqq a^3 b + ab^3 - 2a^2b^2 = ab(a-b)^2,$$

která pro kladná čísla a, b zřejmě platí. Vzhledem k tomu, že všechny úpravy byly ekvivalentní, můžeme celý postup obrátit. Nerovnost je tak dokázána.

Jiné řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < b \leqq a$ (dané vztahy se výměnou čísel a a b nemění). Nerovnost $c^2 + ab \leqq ac + bc$ je ekvivalentní s nerovností $(a-c)(c-b) \geqq 0$, tudíž stačí dokázat, že $b \leqq c \leqq a$. Platí

$$c^2 = b^2 + a^2 - ab = b^2 + a(a-b) \geqq b^2,$$

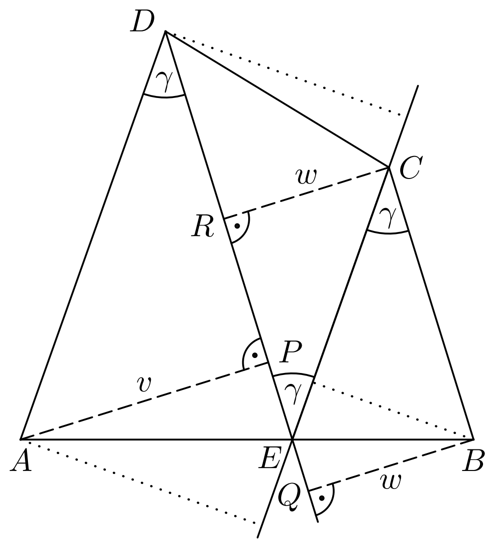
tedy $b \leqq c$. Analogicky zjistíme, že

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + b(b-a) \leqq a^2,$$

a odtud $c \leqq a$. Tím je důkaz proveden.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za převedení původní nerovnosti do součinového tvaru, nebo 4 body za úpravu na tvar (1).

4. Hledaný obsah trojúhelníku ECD označme S. Úhel DEC je střídavý s úhly ADE a ECB, odtud $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 1). Trojúhelníky EDA a EDC mají



Obr. 1

společnou stranu ED, poměr jejich obsahů je tedy roven poměru příslušných výšek. Když navíc po řadě označíme P, Q a R kolmé průměty vrcholů A, B a C na přímku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravoúhlých trojúhelníků AEP a BEQ úměru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pro trojúhelníky ECD a ECB zjistíme, že

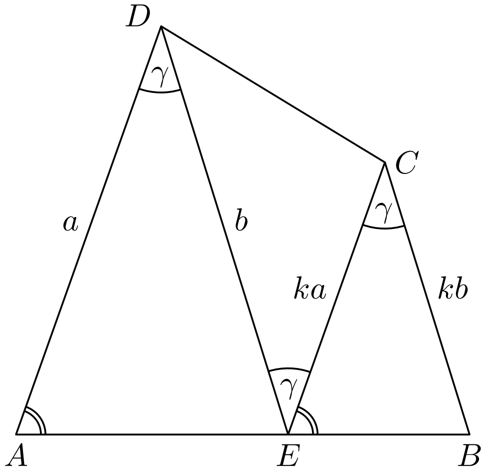
$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 1 jsou příslušné průměty jen naznačeny, ale jde o týž výpočet jako v předešlém odstavci, jen v něm zaměníme odpovídající body $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ a příslušné obsahy trojúhelníků AED a BEC.) Dohromady tedy je $S : 8 = 18 : S$ neboli $S^2 = 144$, takže trojúhelník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$. Odtud plyne podobnost trojúhelníků AED a EBC. Označíme-li k příslušný poměr podobnosti (obr. 2), platí pro obsahy dotyčných trojúhelníků

$$18 = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \tfrac{1}{2}ka \cdot b\sin\gamma, \quad 8 = \tfrac{1}{2}ka \cdot kb\sin\gamma,$$

takže zřejmě platí $18 \cdot 8 = S^2$. Pro obsah trojúhelníku ECD tak dostáváme $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění vztahů $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$.