63. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Ostrava, 23.–26. března 2014

1. *Nechť n je celé kladné číslo. Označme všechny jeho kladné dělitele d_1, d_2, …, d_k tak, aby platilo $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (je tedy $d_1 = 1$ a $d_k = n$). Zjistěte všechny takové hodnoty n, pro něž platí $d_5 - d_3 = 50$ a $11d_5 + 8d_7 = 3n$.* (Matúš Harminc)

Řešení. Rozlišíme, zda hledané n je liché či sudé.

(i) Nechť n je liché, pak i všechna d_i jsou lichá. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ plyne $d_7 \mid 11d_5$ a také $d_5 \mid 8d_7$ neboli $d_5 \mid d_7$. Z $d_5 \mid d_7 \mid 11d_5$ s ohledem na $d_7 > d_5$ máme $d_7 = 11d_5$ a po dosazení do rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme $99d_5 = 3n$ neboli $33d_5 = n$. Vidíme, že čtyři čísla 1, 3, 11 a 33 jsou dělitelé čísla n, a to dokonce jediní dělitelé menší než 50, neboť pro pátý dělitel d_5 už podle zadání platí $d_5 = d_3 + 50 > 50$. Máme tedy $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 11$, $d_4 = 33$, $d_5 = d_3 + 50 = 61$, a proto $n = 33d_5 = 33 \cdot 61 = 2\,013$. Toto číslo skutečně vyhovuje, neboť jeho nejmenší dělitelé jsou v předchozí větě vypsáni správně, navíc platí $d_6 = 61 \cdot 3$ a $d_7 = 61 \cdot 11$, takže je skutečně splněno $d_7 = 11d_5$, tedy i vše požadované.

(ii) Nechť n je sudé. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ pak plyne $2 \mid d_5$, takže rovněž $2 \mid d_5 - 50 = d_3$. Protože $d_1 = 1$ a $d_2 = 2$, nemůže být $d_3 = 3$, takže je buď $d_3 = 4$, nebo $d_3 = 2t$, kde $t > 2$. Poslední však možné není (číslo $t < d_3$ by chybělo ve výpisu nejmenších dělitelů čísla n), a proto je nutně $d_3 = 4$. Pak je ovšem $d_5 = d_3 + 50 = 54$, a tedy $3 \mid n$, přestože 3 není mezi nejmenšími děliteli čísla n. Žádné vyhovující sudé n proto neexistuje.

Odpověď. Úloha má jediné řešení $n = 2\,013$.

Jiné řešení. Pro dělitele $d_5 < d_7$ máme $d_5 = n/x$ a $d_7 = n/y$, kde $x > y$ jsou opět kladní dělitelé čísla n. Dosazením do $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme po vydělení n rovnici $11/x + 8/y = 3$, kterou v oboru všech celých kladných čísel standardně vyřešíme, kupříkladu úpravou na součinový tvar:

$$8x = y(3x - 11) \;\Leftrightarrow\; 8(3x - 11) + 88 = 3y(3x - 11) \;\Leftrightarrow\; (3x - 11)(3y - 8) = 88.$$

Z první upravené rovnice máme $3x - 11 > 0$, takže z poslední rovněž $3y - 8 > 0$; s přihlédnutím k $x \geqq y + 1$ tudíž platí $3x - 11 \geqq 3y - 8 > 0$. Pro uspořádanou dvojici činitelů z rozkladu čísla 88 proto dostáváme následující možnosti

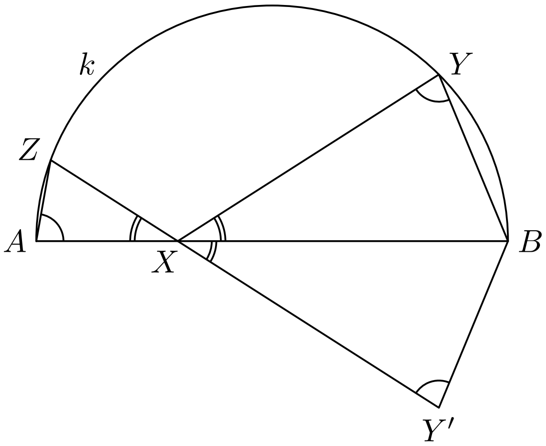
$$(3x - 11, 3y - 8) \in \{(88, 1), (44, 2), (22, 4), (11, 8)\}.$$

Podle zbytků modulo 3 však vyhovují pouze dvojice $(88, 1)$ a $(22, 4)$, kterým odpovídají páry (x, y) rovné $(33, 3)$, resp. $(11, 4)$. Pro první z nich máme $d_5 = n/33$ (a $d_7 = n/3$), takže 1, 3, 11 a 33 jsou dělitelé čísla n, odkud stejně jako v prvním řešení dojdeme k hledanému $n = 2\,013$. Pro $(x, y) = (11, 4)$ neboli $d_5 = n/11$ a $d_7 = n/4$ má číslo n dělitele 1, 2, 4, 11, 22, 44, což je ve sporu s nerovností $d_5 > 50$.

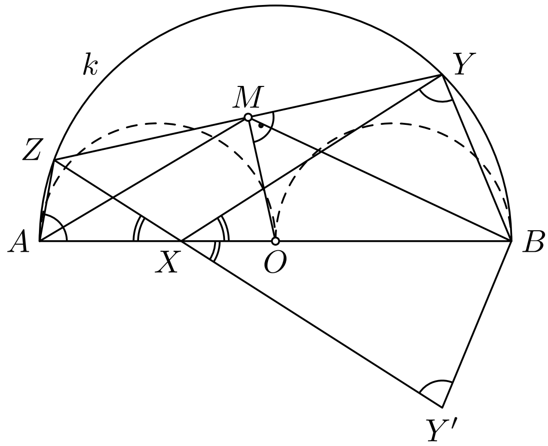
2. *V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ.* (Michal Rolínek, Jaroslav Švrček)

Řešení. Podle zadání leží body Y a Z ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB. Sestrojme obraz Y' bodu Y v souměrnosti podle přímky AB. Vzhledem k předpokládané podobnosti jsou úhly XAZ a BYX shodné (obr. 1), takže je také $|\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle BY'Z|$. Z této rovnosti ovšem podle věty o obvodových úhlech plyne, že na kružnici k opsané trojúhelníku ABZ leží nejen bod Y, ale i bod Y'. Přímka AB jakožto osa tětivy YY' tak prochází středem O kružnice k, takže tětiva AB je její průměr. Kružnice $k = ABZ$

tedy na volbě bodu Z nezáleží. Střed M její tětivy YZ proto nutně leží ve vnitřní oblasti kružnice k. Z pravých úhlů OMZ a OMY (obr. 2) vidíme, že (menší) úhly AMO a BMO jsou ostré, takže bod M nutně leží v průniku vnějších oblastí Thaletových kružnic nad průměry AO a BO. Ukažme, že obě nutné podmínky na polohu bodu M už společně vymezují hledanou množinu.



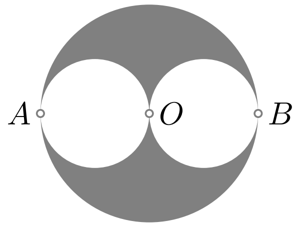
Obr. 1



Obr. 2

Nechť M je libovolný bod ve vnitřní oblasti kružnice k, pro nějž jsou oba úhly AMO a BMO ostré (tj. bod M leží vně obou kruhů s průměry AO a BO). Pak zřejmě kolmice k přímce OM v bodě M protne kružnici k v polorovině ABM, takže na jedné z Thaletových polokružnic nad průměrem AB vytne tětivu, jejíž krajní body můžeme označit Y a Z tak, aby A, B, Y, Z bylo pořadím bodů na kružnici k. Je-li Y' obraz bodu Y na druhé polokružnici v souměrnosti podle průměru AB, pak pro průsečík X úseček AB a $Y'Z$ platí, že trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné podle věty *uu*. Důkaz je hotov.

Závěr. Hledanou množinou je vnitřek kruhu s průměrem AB a středem O bez obou kruhů s průměry AO a BO (obr. 3).



Obr. 3

---

3. *Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně“, která odděluje dvě její políčka, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníčky 2×1 tak, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel.* (Michal Rolínek)

Řešení. Dotyčných hran je $7 \cdot 8 = 56$ svislých a stejný počet vodorovných, celkem jich je $56 \cdot 2 = 112$. Při libovolném rozřezání šachovnice vznikne 32 obdélníčků 2×1, proto se každé takové rozřezání dotkne právě $112 - 32 = 80$ hran, a přispěje tak do celkového součtu číslem 80. Výsledný součet je tudíž dělitelný číslem 80, takže jeho dekadický zápis končí nulou.

4. *Do kina přišlo 234 diváků. Určete, pro která $n \geqq 4$ se mohlo stát, že diváky šlo rozesadit do n řad tak, aby každý divák v i-té řadě se znal právě s j diváky v j-té řadě pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. (Vztah známosti je symetrický.)*

(Tomáš Jurík)

Řešení. Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme p_k počet diváků v k-té řadě. Podmínka úlohy pro daná i a j znamená, že počet známostí mezi diváky z i-té a j-té řady je roven jp_i. Prohozením rolí čísel i a j zjistíme, že stejný počet se má rovnat číslu ip_j. Musí tedy platit $jp_i = ip_j$ neboli $p_i : p_j = i : j$. Docházíme tak k závěru, že počty p_k diváků v jednotlivých řadách nutně splňují podmínku

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = 1 : 2 : \ldots : n.$$

Ukažme, že je to i podmínka postačující, že tedy při počtech $p_k = kd$ pro vhodné celé d se rozesazení diváci mohli znát tak, aby podmínka ze zadání úlohy byla splněna. Pro $d = 1$ tomu tak jistě bude, když se budou navzájem znát všichni diváci v kině; pro obecné d stačí, aby diváci byli rozděleni do d skupin navzájem se znajících diváků a aby diváci z každé takové skupiny byli rozesazeni do jednotlivých řad stejně jako v případě $d = 1$.

Naším úkolem je tedy zjistit, pro která $n \geqq 4$ existuje celé kladné číslo d vyhovující rovnici

$$d + 2d + \ldots + nd = 234 \quad \text{neboli} \quad dn(n+1) = 468.$$

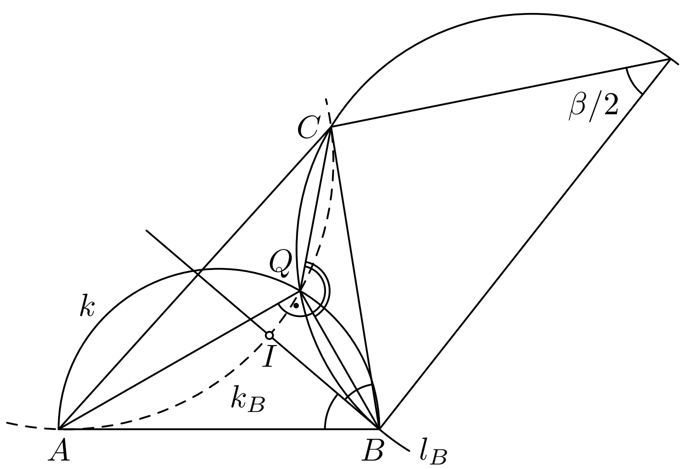
Hledáme tak všechny dělitele čísla $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$, již jsou tvaru $n(n+1)$. Protože $22 \cdot 23 > 468$, musí platit $n < 22$, tedy $n \in \{4, 6, 9, 12, 13, 18\}$. Vidíme, že vyhovuje jedině $n = 12$ (s příslušným $d = 3$).

Odpověď. Popsaná situace mohla nastat jedině při rozesazení diváků do 12 řad.

---

5. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme k kružnici s průměrem AB. Kružnice, která se dotýká osy úhlu BAC v bodě A a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě P, $P \neq A$. Kružnice, která se dotýká osy úhlu ABC v bodě B a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě Q, $Q \neq B$. Dokažte, že průsečík přímek AQ a BP leží na ose úhlu ACB.* (Peter Novotný)

Řešení. Uvažované kružnice APC a BQC označme po řadě l_A, l_B a všimněme si třeba druhé z nich (obr. 4, úhly trojúhelníku ABC značíme obvyklým způsobem).



Obr. 4

Vysvětleme, že skutečně platí, co na obrázku vidíme. Především bod Q zřejmě leží v polorovině BCA, neboť pro body X tamního oblouku BC kružnice l_B se úhel AXB zvětšuje od (ostrého) úhlu γ po (tupý) úhel $180° - \beta/2$, takže nabývá uvnitř oblouku hodnoty $90°$. Protože úsekový úhel příslušný tomuto oblouku BC kružnice l_B je roven $\beta/2$, je $|\sphericalangle BQC| = 180° - \beta/2$. Odtud $|\sphericalangle AQB| + |\sphericalangle BQC| = 270° - \beta/2 > 180°$. Proto bod Q leží v polorovině ACB, a tudíž i uvnitř trojúhelníku ABC, konvexní úhel AQC má tedy velikost $90° + \beta/2$. Označíme-li I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bude mít úhel AIC stejnou velikost, $|\sphericalangle AIC| = 180° - \alpha/2 - \gamma/2 = 90° + \beta/2$. To ovšem znamená, že bod Q leží na stejném oblouku AC kružnice $k_B = ACI$ jako bod I, takže přímka AQ je chordálou kružnic k a k_B.

Druhá uvažovaná přímka BP je analogicky chordálou kružnic k a $k_A = BCI$. Průsečík obou přímek AQ a BP má tedy stejnou mocnost ke kružnicím k_A a k_B, proto leží na jejich chordále, kterou je přímka CI, tedy osa úhlu ACB. Důkaz je hotov.

Poznámka. Ještě jedním způsobem vysvětlíme, proč bod Q leží v polorovině BCA. Průsečík Q kružnic k a l_B zřejmě musí ležet v polorovině ABC v úhlu omezeném tečnami obou kružnic v bodě B. Přitom vrchol C ostroúhlého trojúhelníku ABC i střed S_B kružnice l_B zřejmě leží vně kruhu omezeného kružnicí k. V trojúhelníku BS_BC leží sice část kružnice k, ale s výjimkou bodů B a C tam určitě neleží žádný jiný bod kružnice l_B. Z toho je patrné, že bod Q musí ležet v polorovině BCA.

---

6. *Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost*

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. (Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

Řešení. Snadným dosazením zjistíme, že dokazovaná nerovnost přejde v rovnost, platí-li aspoň jedna z rovností $a = 0$, $b = 0$ nebo $a = b$. Z dalšího postupu vyplyne, že jsou to jediné případy rovnosti.

S ohledem na symetrii budeme předpokládat, že platí $a > b > 0$, a postupnými ekvivalentními úpravami dokážeme ostrou nerovnost ze zadání, kterou rovnou zapíšeme zbavenou zlomků:

$$a\sqrt{a^2+1}\sqrt{ab+1} + b\sqrt{b^2+1}\sqrt{ab+1} > (a+b)\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}.$$

Nyní roznásobíme pravou stranu zastoupeným součtem $a + b$ a po přeskupení výrazů vytkneme společné činitele:

$$a\sqrt{a^2+1}\bigl(\sqrt{ab+1} - \sqrt{b^2+1}\bigr) > b\sqrt{b^2+1}\bigl(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{ab+1}\bigr)$$

Na levé i pravé straně vystupují rozdíly odmocnin, rozšíříme je součty těchže odmocnin na zlomky:

$$a\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1}+\sqrt{b^2+1}} > b\sqrt{b^2+1}\cdot\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}}.$$

Obě strany teď můžeme vydělit kladným číslem $ab(a-b)$; po následném odstranění zlomků dostaneme nerovnost

$$\sqrt{a^2+1}\bigl(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}\bigr) > \sqrt{b^2+1}\bigl(\sqrt{b^2+1}+\sqrt{ab+1}\bigr),$$

jejíž platnost již plyne porovnáním odmocnin na stejných místech obou stran (díky předpokladu $a > b$ totiž platí $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1}$).

Jiné řešení. Tentokrát z našeho postupu vyloučíme pouze případy $a = 0$ a $b = 0$, v nichž je ovšem dokazovaná nerovnost triviální. Budeme tedy předpokládat, že čísla a a b jsou kladná a zapíšeme pro ně Cauchyovu nerovnost

$$\left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right)(au + bv) \geqq (a+b)^2$$

s kladnými koeficienty $u = \sqrt{b^2+1}$ a $v = \sqrt{a^2+1}$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\left(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}\right) \geqq (a+b)^2. \tag{1}$$

Druhý činitel z levé strany (1) odhadneme *shora* podle jiné Cauchyovy nerovnosti takto:

$$\begin{aligned} a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1} &= \sqrt{a}\sqrt{ab^2+a} + \sqrt{b}\sqrt{a^2b+b} \leqq \\ &\leqq \sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b} = \sqrt{a+b}\sqrt{(a+b)(ab+1)} = (a+b)\sqrt{ab+1}. \end{aligned}$$

Pro první činitel z levé strany (1) tak dostáváme

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}},$$

což jsme měli dokázat. Protože v první vypsané Cauchyově nerovnosti nastane rovnost, právě když platí $u = v$ neboli $\sqrt{b^2+1} = \sqrt{a^2+1}$ čili $a = b$, je poslední rovnost třetím a posledním případem (kromě zmíněných případů $a = 0$ a $b = 0$), kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

Jiné řešení. Vyloučíme z úvah zřejmé případy $a = 0$, $b = 0$, $a = b$ a dokazovanou ostrou nerovnost ekvivalentně upravíme na tvar

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

Levá strana je zřejmě levou stranou Jensenovy nerovnosti

$$pf(\alpha) + qf(\beta) > f(p\alpha + q\beta) \tag{2}$$

s kladnými koeficienty $p = a/(a+b)$ a $q = b/(a+b)$ (jež jak víme, musejí splňovat podmínku $p + q = 1$) pro funkci $f(x) = 1/\sqrt{x}$ v bodech $\alpha = b^2+1$ a $\beta = a^2+1$. Protože funkce f je v oboru kladných čísel ryze konvexní[1] a body α, β jsou různé díky předpokladu $a \neq b$, Jensenova nerovnost (2) platí. Zbývá se tedy přesvědčit, že i její pravá strana se rovná pravé straně upravené nerovnosti z úvodu řešení. To je snadné:

$$\begin{aligned} f(p\alpha + q\beta) &= f\left(\frac{a}{a+b}(b^2+1) + \frac{b}{a+b}(a^2+1)\right) = \\ &= f\left(\frac{a+ab^2+b+a^2b}{a+b}\right) = f(ab+1) = \frac{1}{\sqrt{ab+1}}. \end{aligned}$$

[1] Graf funkce $y = x^{-\frac{1}{2}}$ je dobře znám ze středoškolských učebnic.