55. mezinárodní matematická olympiáda

Jaromír Šimša

Každoroční prestižní klání v řešení matematických úloh pro středoškoláky ze zemí celého světa zavítalo letos poprvé na africký kontinent. Jeho v pořadí již 55. ročník proběhl ve dnech 3.–13. července 2014 v Kapském Městě za účasti 560 soutěžících (z toho 56 dívek) ze 101 zemí pěti kontinentů. Pořadatelství této náročné akce se zdárně zhostila *South African Mathematics Foundation*, která samotné soutěžení a jeho vyhodnocování, jakož i ubytování všech účastníků zajistila v rozsáhlém areálu Univerzity Kapského Města, situovaného na úpatí *Stolové hory* a poskytujícího soutěžícím i opravovatelským komisím vhodné podmínky. V nejvýše postavené budově, vnějším sloupovím ozdobené univerzitní aule proběhlo slavnostní zahájení této olympiády i závěrečný ceremoniál předání medailí nejúspěšnějším soutěžícím, v obou případech za účasti paní *Angeliny Motshekga*, ministryně základního a středního školství Jihoafrické republiky.

Družstvo České republiky tvořila šestice soutěžících (vesměs žáků osmiletých gymnázií) *Filip Bialas* (5. roč. G Opatov, Praha 4), *Martin Hora* (8. roč. G Mikulášské nám., Plzeň), *Viktor Němeček* (7. roč. G Jihlava), *Tomáš Novotný* (8. roč. G Česká Lípa), *Radovan Švarc* (7. roč. G Česká Třebová) a *Pavel Turek* (5. roč. G Olomouc-Hejčín). Vedoucími naší delegace byli *doc. Jaromír Šimša* (PřF MU Brno) a *dr. Jaroslav Švrček* (PřF UP Olomouc).

Vlastní dvoudenní soutěž (jednotlivců, nikoli družstev) spočívala jako obvykle v řešení šesti úloh, každý den tři po dobu 4,5 hodiny. Podle součtu bodových zisků (nejvýše 7 bodů za jednu úlohu) rozhodla mezinárodní porota o udělení 49 zlatých medailí (soutěžícím se ziskem alespoň 29 bodů), 113 stříbrných medailí (za zisk 22–28 bodů) a 133 bronzových medailí (za zisk 16–21 bodů). Plný počet 42 bodů získali tři soutěžící: *Alexander Gunning* (Austrálie), *Jiyang Gao* (Čína) a *Po-Sheng Wu* (Tchaj-wan). Naši reprezentanti podali velmi dobré vyrovnané výkony (v rozpětí zisků 18 až 24 bodů), takže po 15 předchozích ročnících soutěže letos každý reprezentant ČR opět vybojoval medaili (nejcennější stříbrnou Tomáš Novotný) a v neoficiálním pořadí států (tradičně sestavovaném podle součtu bodů šestice soutěžících) se ČR umístila na 32. místě, které pro nás představuje nejlepší umístění za posledních devět let (v roce 2005 to bylo neuvěřitelné pořadové číslo 16, v dalších letech pak čísla 48, 40, 39, 40, 48, 39, 47, 37, až letos 32).

K textu zprávy připojujeme tabulku souhrnných výsledků nejúspěšnějších ze zúčastněných zemí, detailní výsledky soutěžících ČR, SR a zadání šestice úloh 55. ročníku MMO. Dodejme ještě, že 56. ročník soutěže proběhne v červenci 2015 ve druhém největším thajském městě Chiang Mai.

Výsledky nejúspěšnějších zemí na 55. MMO

		Z	S	B	Σ			Z	S	B	Σ
1.	ČLR	5	1	0	201	38.	Švýcarsko	0	2	4	114
2.	USA	5	1	0	193	39.–40.	Arménie	0	2	1	110
3.	Tchaj-wan	4	0	2	192		Indie	0	1	3	110
4.	Rusko	3	3	0	191	41.	Řecko	0	2	2	109
5.	Japonsko	4	1	1	177	42.	Litva	0	1	3	104
6.	Ukrajina	2	3	1	175	43.	Saudská Arábie	0	0	4	103
7.	Korea	2	4	0	172	44.	Mongolsko	0	0	5	102
8.	Singapur	3	2	1	161	45.–46.	Filipíny	0	1	3	96
9.	Kanada	2	1	3	159		Francie	0	1	4	96
10.	Vietnam	3	2	1	157	47.	Gruzie	0	1	2	92
11.–12.	Austrálie	1	3	2	156	48.–49.	Moldavsko	0	0	2	90
	Rumunsko	1	5	0	156		Španělsko	0	0	3	90
13.	Nizozemsko	3	2	1	155	50.	Tádžikistán	0	0	2	89
14.	KLDR	1	4	0	154	51.–52.	Bosna a Hercegovina	0	1	0	86
15.	Maďarsko	1	4	1	153		Rakousko	0	1	1	86
16.	Německo	0	6	0	152	53.	Bangladéš	0	1	1	84
17.	Turecko	1	3	2	147	54.–55.	Kolumbie	0	1	1	82
18.–19.	Hongkong	0	4	2	143		Srí Lanka	0	0	2	82
	Izrael	0	5	1	143	56.	Argentina	0	0	2	81
20.	Velká Británie	0	4	2	142	57.	Švédsko	0	0	2	80
21.–22.	Írán	0	4	2	131	58.	Slovinsko	0	0	2	78
	Thajsko	0	4	2	131	59.	Belgie	0	1	0	77
23.–25.	Kazachstán	1	1	4	129	60.	Nový Zéland	0	1	1	76
	Malajsie	2	1	1	129	61.	Ázerbájdžán	0	0	1	75
	Srbsko	1	3	2	129	62.	Makao	0	0	2	74
26.–28.	Itálie	1	2	1	128	63.	Kostarika	0	0	1	72
	Mexiko	0	4	1	128	64.–65.	Irsko	0	0	0	67
	Polsko	1	0	4	128		JAR	0	0	1	67
29.–31.	Chorvatsko	1	2	2	126	66.	Lotyšsko	0	1	1	64
	Indonésie	0	2	3	126	67.–68.	Dánsko	0	0	2	62
	Peru	0	1	5	126		Makedonie	0	0	1	62
32.	*Česká republika*	0	1	5	124	69.	Norsko	0	1	0	61
33.	Portugalsko	0	2	3	123	70.	Finsko	0	0	1	59
34.–36.	Bělorusko	1	1	3	122	71.	Paraguay	0	0	1	56
	Brazílie	0	3	2	122	72.–73.	Kypr	0	0	0	53
	Slovensko	0	1	5	122		Sýrie	0	0	0	53
37.	Bulharsko	0	3	1	120	74.	Estonsko	0	0	0	52

Výsledky reprezentantů ČR na 55. MMO

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Σ	Medaile
163.–199.	Filip Bialas	7	7	0	7	0	0	21	Bronz
238.–255.	Martin Hora	7	4	0	7	0	0	18	Bronz
163.–199.	Viktor Němeček	3	4	0	7	7	0	21	Bronz
102.–108.	Tomáš Novotný	6	7	0	7	4	0	24	Stříbro
200.–220.	Radovan Švarc	7	6	0	7	0	0	20	Bronz
200.–220.	Pavel Turek	7	6	0	7	0	0	20	Bronz
	Celkem	37	34	0	42	11	0	124	

Výsledky reprezentantů SR na 55. MMO

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Σ	Medaile
256.–266.	Patrik Bak	7	0	1	7	2	0	17	Bronz
69.–82.	Truc Lam Bui	6	7	0	7	7	0	27	Stříbro
221.–237.	Zhen Ning Dávid Liu	7	5	0	7	0	0	19	Bronz
238.–255.	Miroslav Psota	5	6	0	7	0	0	18	Bronz
163.–199.	Samuel Sládek	7	6	0	7	1	0	21	Bronz
200.–220.	Ľudmila Šimková	7	5	0	7	1	0	20	Bronz
	Celkem	39	29	1	42	11	0	122	

Zadání úloh 55. MMO

Úloha 1. Nechť $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Dokažte, že existuje právě jedno celé číslo $n \geq 1$ takové, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(Rakousko)

Úloha 2. Nechť $n \geq 2$ je celé číslo. Uvažujme šachovnici o rozměrech $n \times n$ složenou z n^2 jednotkových čtvercových políček. Konfiguraci n věží na této šachovnici nazýváme *šťastnou*, pokud každý řádek a každý sloupec obsahuje právě jednu věž. Najděte největší kladné celé číslo k takové, že pro každou šťastnou konfiguraci n věží existuje čtverec o rozměrech $k \times k$, který neobsahuje věž na žádném ze svých k^2 políček. (Chorvatsko)

Úloha 3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\angle ABC| = |\angle CDA| = 90°$. Bod H je patou kolmice z bodu A na přímku BD. Body S, T leží po řadě na stranách AB, AD tak, že bod H je vnitřním bodem trojúhelníku SCT a platí

$$|\angle CHS| - |\angle CSB| = 90°, \quad |\angle THC| - |\angle DTC| = 90°.$$

Dokažte, že přímka BD se dotýká kružnice opsané trojúhelníku TSH. (Írán)

Úloha 4. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\angle PAB| = |\angle BCA|$ a $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (Gruzie)

Úloha 5. Banka v Kapském Městě razí mince s hodnotou $\frac{1}{n}$ pro každé kladné celé číslo n. Mějme konečnou kolekci takových mincí (ne nutně různých hodnot), která má celkovou hodnotu nejvýše $99 + \frac{1}{2}$. Dokažte, že tuto kolekci je možné rozdělit na 100 nebo méně částí tak, aby každá část měla celkovou hodnotu nejvýše 1. (Lucembursko)

Úloha 6. Říkáme, že přímky v rovině jsou v *obecné poloze*, pokud žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Množina přímek v obecné poloze rozděluje rovinu na oblasti, z nichž některé mají konečný obsah; nazýváme je *konečné oblasti* příslušné dané množině přímek. Pro každé dostatečně velké n dokažte, že v libovolné množině n přímek v obecné poloze je možné obarvit modře aspoň $\sqrt{n}$ přímek tak, že žádná z příslušných konečných oblastí nebude mít celou hranici modrou.

Poznámka. Řešení, ve kterých bude tvrzení dokázáno s výrazem $c \cdot \sqrt{n}$ namísto $\sqrt{n}$, budou ohodnocena body v závislosti na hodnotě konstanty c. (Rakousko)