8. Středoevropská matematická olympiáda

Osmý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 18. – 24. září 2014 v Drážďanech. Soutěže se již tradičně zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarsko, Německo, Rakousko, Slovinsko, Chorvatsko, Maďarsko, Slovensko, Litva, Polsko a Česká republika). Každou zemi přitom reprezentovalo šestičlenné družstvo složené z žáků, kteří dosud nematurovali. Složení českého reprezentačního týmu bylo dáno výsledky ústředního kola 63. ročníku MO a omezujícím pravidlem MEMO, podle nichž nesmí být členové družstva pro MEMO ve stejném roce současně členy národních reprezentačních týmů svých zemí na Mezinárodní MO (IMO).

Složení českého týmu na 8. MEMO bylo následující: *Libor Drozdek* (7/8 G L. Jaroše, Holešov), *Vojtěch Dvořák* (7/8 G Praha 1, Truhlářská), *Matěj Konečný* (7/8 G České Budějovice, Jírovcova), *Karolína Kuchyňová* (3/4 G M. Lercha, Brno), *Marian Poljak* (6/8 G J. Škody, Přerov) a *Václav Rozhoň* (7/8 G J. V. Jirsíka, České Budějovice). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, pedagogickým vedoucím byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*

Den před vlastním soutěžením provedla mezinárodní jury definitivní výběr všech 12 soutěžních úloh, a to po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel pro soutěž jednotlivců a po dvou jiných z těchže oblastí pak pro soutěž družstev. Pro týmovou soutěž byla letos vybrána také jedna původní česká úloha (T–2), jejímž autorem byl *Pavel Calábek.* Zadání všech úloh pak vedoucí jednotlivých delegací přeložili do svých mateřských jazyků. Soutěž jednotlivců se konala v sobotu 20. září 2012 a soutěž družstev pak proběhla o den později. Po oba dny se soutěžilo v učebnách Gymnasia Marie Curie v Drážďanech.

Následující dva dny probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Každá soutěžní úloha byla přitom hodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovacím schématem v rozpětí 0–8 bodů). Na poslední den pobytu v Drážďanech (úterý 23. září) připravili němečtí organizátoři pro všechny účastníky soutěže jednodenní výlet do nedalekého Meißenu, kde všichni účastníci soutěže navštívili středověký hrad Albrechtsburg, který patří mezi nejkrásnější památky svého typu v Sasku.

Po návratu z Meißenu byli na závěrečném slavnostním večeru oficiálně vyhlášeni vítězové soutěže jednotlivců i soutěže družstev. V soutěži jednotlivců byly uděleny 3 zlaté, 11 stříbrných a 18 bronzových medailí. Je potěšitelné, že jedním ze tří držitelů zlaté medaile byl také náš reprezentant *Václav Rozhoň*, který se ziskem 29 bodů (z 32 možných) obsadil 3. příčku v absolutním pořadí jednotlivců, a stal se tak prvním českým reprezentantem který získal v osmileté historii MEMO zlatou medaili. Nejlepší dva soutěžíci (z Chorvatska a z Maďarska) pak dosáhli maximálního bodového zisku. Tři naši reprezentanti – *Marian Poljak* (19 b.), *Vojtěch Dvořák* a *Matěj Konečný* (oba 18 b.) si z Drážďan přivezli domů bronzové medaile. Za zmínku stojí rovněž výborný výkon naší jediné dívky – *Karolíny Kuchyňové* (17 b.), která obdržela čestné uznání (za bezchybné vyřešení aspoň jedné úlohy), když jí bronzová medaile unikla o jediný bod. V soutěži družstev se našim již tolik nevedlo. Skončili na děleném 6. – 8. místě (společně s Rakouskem a Švýcarskem) se ziskem 34 bodů.

Podrobnější informace mohou zájemci nalézt na oficiálních stránkách 8. MEMO (www.memo2014.de).

Na závěr uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců

(20. září 2014)

Příklad I–1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$xf(y) + f(xf(y)) - xf(f(y)) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x + y).$$

(*Litva*)

Příklad I–2

Uvažujme rozdělení pravidelného n-úhelníku na $n - 2$ trojúhelníků pomocí $n - 3$ jeho úhlopříček, které se neprotínají uvnitř tohoto n-úhelníku. *Dvojbarevnou triangulací* rozumíme takové rozdělení n-úhelníku, v níž je každý trojúhelník obarven černou nebo bílou barvou a každé dva trojúhelníky, které mají společnou stranu, jsou obarveny různými barvami. Přirozené číslo $n \geq 4$ nazveme *triangulární*, právě když tento pravidelný n-úhelník má dvojbarevnou triangulaci takovou, že pro každý jeho vrchol A je počet černých trojúhelníků s vrcholem A větší než počet bílých trojúhelníků se stejným vrcholem A.

(*Chorvatsko*)

Příklad I–3

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$ a I značí střed kružnice jemu vepsané. Nechť E je takový bod strany AC, pro který platí $|AE| = |AB|$. Dále nechť G je takový bod přímky EI, pro který platí $|\sphericalangle IBG| = |\sphericalangle CBA|$, přičemž I je vnitřním bodem úsečky EG.

Dokažte, že přímka AI, kolmice k přímce AE sestrojená v bodě E a osa úhlu BGI se protínají v jednom bodě.

(*Chorvatsko*)

Příklad I–4

Pro libovolná celá čísla $n \geq k \geq 0$ definujeme *bibinomický koeficient* $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ předpisem

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}\,.$$

Určete všechny dvojice (n, k) celých čísel, kde $n \geq k \geq 0$, takové, že odpovídající bibinomický koeficient je celé číslo.

Poznámka. Dvojný faktoriál $n!!$ *je definován jako součin všech sudých čísel po* n*, je-li* n *sudé, a jako součin všech lichých čísel po* n*, je-li* n *liché. Např.* $4!! = 2 \cdot 4 = 8$*,* $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ *a definujeme* $0!! = 1$.

(*Rakousko*)

Soutěž družstev

(21. září 2014)

Příklad T–1

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b+y}\,,$$

kde a, b, x a y jsou kladná reálná čísla splňující nerovnosti

$$\frac{1}{a+x} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+y} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b+x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{b+y} \geq 1\,.$$

(*Maďarsko*)

Příklad T–2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, které pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují podmínku

$$xf(xy) + xyf(x) \geq f(x^2)f(y) + x^2y.$$

(*Česká republika*)

Příklad T–3

Nechť K a L jsou daná přirozená čísla. Na pravoúhelníkové desce složené z $2K \times 2L$ jednotkových čtverců se pohybuje mravenec z levého dolního rohu do pravého horního rohu. V každém kroku se přesune vodorovně nebo svisle na sousední pole, přičemž na žádné pole nevstoupí více než jedenkrát. Na některá pole desky mravenec nemusí vstoupit. V určitých případech tvoří všechna nenavštívená pole jediný pravoúhelník, který nazveme MEMO-*pravoúhelník.*

Určete počet všech různých MEMO-pravoúhelníků.

Poznámka. Pravoúhelníky jsou různé, pokud nejsou tvořeny týmiž jednotkovými čtverci.

(*Rakousko*)

Příklad T–4

Ve Šťastném Městě žije 2014 obyvatel, které označíme $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$. Každý z nich je v každém okamžiku buď *šťastný*, nebo *nešťastný*. Nálada každého obyvatele A se mění (z nešťastného na šťastného a naopak), právě když se jiný šťastný obyvatel usměje na A. V pondělí ráno bylo ve Šťastném Městě N šťastných obyvatel. Poté se v pondělí obyvatel A_1 usmál na A_2, dále se A_2 usmál na A_3 atd., až nakonec se A_{2013} usmál na A_{2014}. Nikdo z nich se neusmál na žádného jiného kromě uvedeného obyvatele. Přesně totéž se opakovalo v úterý, ve středu a ve čtvrtek. Ve čtvrtek večer tak bylo ve městě právě 2000 šťastných obyvatel.

Určete největší možnou hodnotu N.

(*Litva*)

Příklad T–5

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Osa AI vnitřního úhlu při vrcholu A protíná přímky DE a DF po řadě v bodech X a Y. Nechť Z značí patu výšky z vrcholu A.

Dokažte, že D je středem kružnice vepsané trojúhelníku XYZ.

(*Slovinsko*)

Příklad T–6

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany BC v bodě D. Přímka AD protíná kružnici k v bodě $L \neq D$. Označme K střed kružnice vně připsané straně BC. Nechť M a N jsou po řadě středy úseček BC a KM.

Dokažte, že body B, C, N a L leží na téže kružnici.

(*Slovensko*)

Příklad T–7

Konečnou množinu A přirozených čísel nazveme *průměrovou*, právě když pro každou její neprázdnou podmnožinu je aritmetický průměr jejích prvků také přirozené číslo. Jinak řečeno, množina A je průměrová, právě když $\frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k)$ je přirozené číslo pro každé $k \geq 1$ a $a_1, \ldots, a_k \in A$ jsou navzájem různá čísla.

Je dáno přirozené číslo n. Určete nejmenší možný součet prvků n-prvkové průměrové množiny.

(*Rakousko*)

Příklad T–8

Určete všechny uspořádané čtveřice (x, y, z, t) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

(*Litva*)

Následující (9.) ročník MEMO se bude konat na základě oficiálního pozvání od 25 do 31. srpna 2015 ve slovinském Koperu.

Vedení českého reprezentačního týmu děkuje přerovské firmě MEOPTA za její sponzorskou pomoc při zajištění jednotného oblečení všech členů reprezentačního družstva na 8. MEMO.

Jaroslav Švrček