64. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1,\\ |1+y| &= z-2,\\ |2-z| &= x-x^2.\end{aligned}$$

2. Označme K a L po řadě body stran BC a AC trojúhelníku ABC, pro které platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť M je průsečík úseček AK a BL. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníků ABM a ABC.

3. Najděte nejmenší přirozené číslo n s ciferným součtem 8, které se rovná součinu tří různých prvočísel, přičemž rozdíl dvou nejmenších z nich je 8.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 22. ledna 2015

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Pravá strana první rovnice je nezáporné číslo, což se promítne do druhé rovnice, kde můžeme odstranit abolutní hodnotu. Také pravá strana druhé rovnice je nezáporné číslo, což se s využitím rovnosti $|z-2| = |2-z|$ promítne do třetí rovnice, kde můžeme odstranit abolutní hodnotu. Daná soustava má pak tvar

$$\begin{aligned} |1-x| &= y+1, \\ 1+y &= z-2, \\ z-2 &= x-x^2 \end{aligned}$$

a odtud jednoduchým porovnáním dostáváme rovnici

$$|1-x| = x-x^2.$$

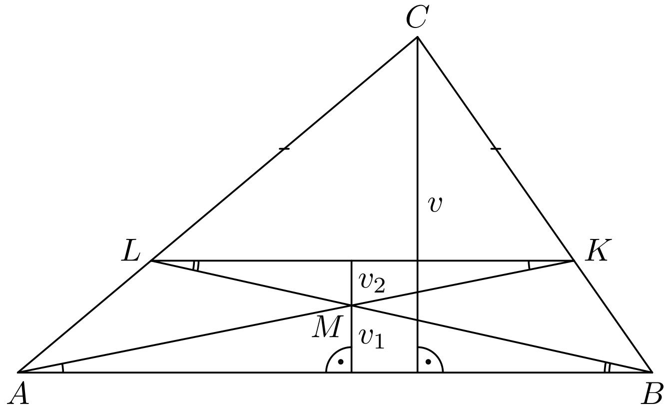
Pro $x < 1$ dostaneme rovnici $1-x = x-x^2$ neboli $(1-x)^2 = 0$, jejíž řešení $x = 1$ ovšem předpokladu $x < 1$ nevyhovuje.

Pro $x \geqq 1$ vyjde rovnice $x^2 = 1$, z jejíchž dvou řešení $x = -1$ a $x = 1$ předpokladu $x \geqq 1$ vyhovuje jen $x = 1$.

Z dané soustavy pak jednoduše dopočítáme hodnoty $y = -1$ a $z = 2$. Soustava má tedy jediné řešení $(x; y; z) = (1; -1; 2)$.

Za systematické a úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhad řešení $(1; -1; 2)$ udělte jeden bod.

2. Označme v výšku trojúhelníku ABC na stranu AB, v_1 výšku trojúhelníku ABM na stranu AB a v_2 výšku trojúhelníku KLM na stranu KL (obr. 1). Z podobnosti trojúhelníků LKC a ABC (zaručené větou *sus*) vyplývá, že $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$. Z porovnání jejich výšek ze společného vrcholu C vidíme, že výška v trojúhelníku ABC je rovna trojnásobku vzdálenosti příčky KL od strany AB, tedy $v = 3(v_1 + v_2)$. Protože AK a BL jsou příčky rovnoběžek KL a AB, plyne ze shodnosti příslušných střídavých úhlů podobnost trojúhelníků ABM a KLM.



Obr. 1

Protože $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$, je také $v_2 = \frac{2}{3}v_1$, a proto $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$, tudíž

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojúhelníky ABM a ABC mají společnou stranu AB, proto jejich obsahy jsou v poměru výšek na tuto stranu, takže obsah trojúhelníku ABC je pětkrát větší než obsah trojúhelníku ABM.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení poměru podobnosti trojúhelníků ABM a KLM udělte 2 body, za určení poměru podobnosti trojúhelníků ABC a LKC udělte 2 body, za závěrečné odvození poměru obsahů trojúhelníků ABM a ABC udělte 2 body.

3. Hledané číslo n je součinem tří různých prvočísel, která označíme p, q, r, $p < q < r$. Číslo $n = pqr$ má ciferný součet 8, který není dělitelný třemi, proto ani n není dělitelné třemi. Konečně hledané číslo n není dělitelné ani dvěma, neboť by muselo být $p = 2$ a $q = p + 8 = 10$, což není prvočíslo. Musí tedy být $p \geqq 5$.

Je-li $p = 5$, je $q = p + 8 = 13$, takže $r \in \{17, 19, 23, 29, 31, \ldots\}$ a $n \in \{1\,105, 1\,235, 1\,495, 1\,885, 2\,015, \ldots\}$. V této množině je zřejmě nejmenší číslo s ciferným součtem 8 číslo $2\,015$.

Je-li $p > 5$, je $p = 11$ nejmenší prvočíslo takové, že i $q = p + 8$ je prvočíslo. Proto $p \geqq 11$, $q \geqq 19$, a tudíž $r \geqq 23$, takže pro odpovídající čísla n platí $n \geqq 11 \cdot 19 \cdot 23 = 4\,807 > 2\,015$.

Hledané číslo je $n = 2\,015$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zkusmé nalezení čísla $n = 2\,015$ udělte 2 body. Nebude-li dokázáno, že pro $p > 5$ neexistuje menší vyhovující n, strhněte 2 body.