64. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C. Osa o_1 úsečky AC protíná stranu AB v bodě K, osa o_2 úsečky BC protíná stranu AB v bodě L. Průsečík os o_1 a o_2 označme O. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC leží na kružnici opsané trojúhelníku OKL.

2. Najděte všechny dvojice prvočísel (p, q) takové, že hodnota výrazu $p^2 + 5pq + 4q^2$ je druhou mocninou celého čísla.

3. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$ab + bc + ca = 16, \quad a \geqq 3.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $2a + b + c$.

4. Mějme n bodů v rovině, $n \geqq 3$, přičemž žádné tři z nich neleží v přímce. Uvažujme vnitřní úhly všech trojúhelníků s vrcholy v daných bodech a velikost nejmenšího takového úhlu označme φ. Pro dané n najděte největší možné φ.

Krajské kolo kategorie A se koná

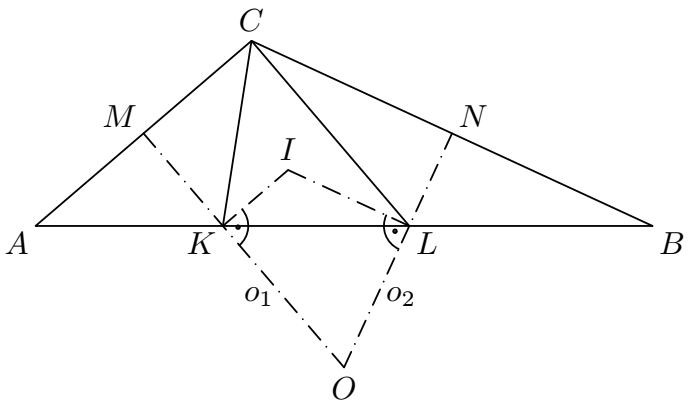
v úterý 13. ledna 2015

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Středy stran AC, BC označme postupně M, N. Střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC označme I. Úvodem poznamenejme, že body K, L leží na straně AB vždy v takovém pořadí jako na obr. 1, protože podle zadání má trojúhelník ABC tupý úhel při vrcholu C, a proto střed O jeho opsané kružnice leží v polorovině opačné k polorovině ABC.



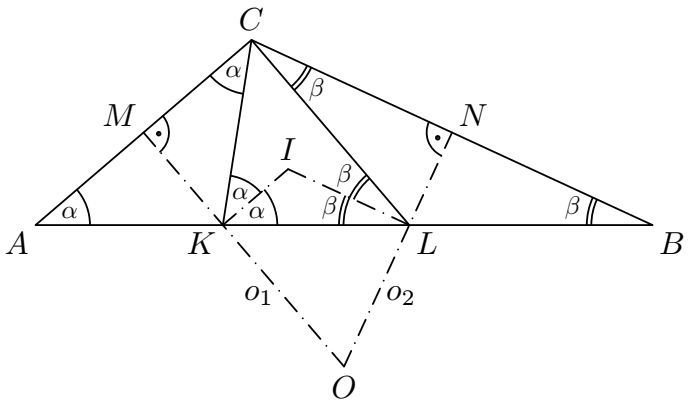
Obr. 1

Bod K leží na ose strany AC, proto je KM osou úhlu AKC. Přímka KI je osou úhlu LKC. Přímky KI a KM jsou osami navzájem sousedních úhlů, a proto jsou na sebe kolmé. Analogicky $LI \perp LN$. Body K, L tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem OI, z čehož již triviálně plyne dokazované tvrzení.

Jiné řešení. Označme úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ a body M, N, I stejně jako v prvním řešení. Stejně jako tam vysvětlíme, že zatímco bod I leží v polorovině ABC, bod O leží v polorovině k ní opačné (díky tupému úhlu ACB).

Čtyřúhelník $MONC$ je tětivový, protože má pravé úhly při vrcholech M a N. Odtud $|\sphericalangle KOL| = 180° - |\sphericalangle MCN| = 180° - \gamma$.

Protože bod K leží na ose strany AC, je trojúhelník AKC rovnoramenný se základnou AC (obr. 2). Při ní mají jeho vnitřní úhly velikost α. Proto $|\sphericalangle LKC| = 180° - |\sphericalangle AKC| = 2\alpha$, a tedy $|\sphericalangle LKI| = \frac{1}{2}|\sphericalangle LKC| = \alpha$. Podobně $|\sphericalangle KLI| = \beta$. Z trojúhelníku KLI tak máme $|\sphericalangle KIL| = 180° - \alpha - \beta = \gamma$.



Obr. 2

Z uvedeného plyne $|\sphericalangle KOL| + |\sphericalangle KIL| = 180°$, takže čtyřúhelník $KOLI$ je tětivový, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu za pozorování, že KM je osou úhlu AKC, dejte 2 body, další 2 body dejte za odvození $KI \perp MO$ a 2 body za dokončení řešení. Při druhém postupu dejte 1 bod za využití rovnoramennosti trojúhelníku AKC, 2 body za vyjádření velikosti úhlu LKI, 1 bod za vyjádření velikosti úhlu KIL, 1 bod za vyjádření velikosti úhlu KOL a 1 bod za dokončení řešení. Naopak jeden bod strhněte, pokud řešitel nezmíní polohu bodu O vůči polorovině ABC (zejména, když v celém svém řešení „přejde“ mlčením podmínku, že úhel ACB je tupý).

2. Předpokládejme, že prvočísla p, q a kladné celé číslo k splňují rovnost $p^2 + 5pq + 4q^2 = k^2$. Tu ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} k^2 - (p^2 + 4pq + 4q^2) &= pq, \\ k^2 - (p + 2q)^2 &= pq, \\ (k - p - 2q)(k + p + 2q) &= pq. \end{aligned} \tag{1}$$

Pravá strana i druhý činitel součinu na levé straně jsou kladné, takže i první činitel musí být kladný. Jelikož p, q jsou prvočísla, číslo pq se dá rozložit na součin dvou kladných čísel jen čtyřmi způsoby: $pq = 1 \cdot pq = p \cdot q = q \cdot p = pq \cdot 1$. Vzhledem k tomu, že číslo $k + p + 2q$ je větší než kterýkoliv prvek množiny $\{1, p, q\}$, v úvahu přichází jen první z rozkladů, takže

$$k - p - 2q = 1 \qquad \text{a} \qquad k + p + 2q = pq. \tag{2}$$

Eliminací proměnné k (např. odečtením první rovnice od druhé) dostaneme

$$2p + 4q = pq - 1 \qquad \text{neboli} \qquad (p - 4)(q - 2) = 9. \tag{3}$$

Činitel $q - 2$ je nezáporný, protože q je prvočíslo. Nezáporný tedy musí být i činitel $p - 4$. Jsou právě tři možnosti, jak číslo 9 rozložit na součin dvou nezáporných čísel:

$$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = 9 \cdot 1.$$

Z nich dostáváme tři řešení $(p, q) \in \{(5, 11), (7, 5), (13, 3)\}$, přičemž všechny nalezené hodnoty p, q jsou skutečně prvočísla. Zkouška není nutná, protože pokud p, q splňují rovnici (3), můžeme k nim z (2) dopočítat celé číslo k tak, aby platila rovnost (1), která je ekvivalentní s původní rovností.

Jiné řešení. Po dosazení $q = p$ do zadaného výrazu vyjde $10p^2$, což není druhá mocnina žádného celého čísla. Musí proto být $p \neq q$.

Daný výraz lze rozložit na součin:

$$p^2 + 5pq + 4q^2 = (p + q)(p + 4q). \tag{4}$$

Prvočísla p a q jsou různá, proto je každé z nich nesoudělné i s $p + q$. Označme d největšího společného dělitele čísel $p+q$ a $p+4q$. Pak $d \mid (p+4q) - (p+q) = 3q$, a jelikož d je nesoudělné s q, nutně $d \in \{1, 3\}$. Oba případy rozebereme.

Pokud $d = 1$, musejí být oba činitelé ve (4) druhými mocninami, čili existují přirozená čísla r, s taková, že platí

$$\begin{aligned} p + q &= r^2, \\ p + 4q &= s^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Navíc zřejmě platí $2 < r < s$, protože $p + 4q > p + q \geqq 2 + 3$. Kombinacemi obou rovnic soustavy (5) dostaneme

$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = s^2 - r^2 = (s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = 4r^2 - s^2 = (2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$

Z první rovnosti vychází $s - r \mid 3q$, tj. $s - r \in \{1, 3, q, 3q\}$. Případy $s - r = q$ a $s - r = 3q$ však můžeme vyloučit, protože jim odpovídají rovnosti $s + r = 3$ a $s + r = 1$, které jsou v rozporu s podmínkou $2 < r < s$. Zbývající dva případy prověříme:

- ▷ Z $s - r = 1$ vyplývá $2r + s = 3r + 1 > 3$ a $2r - s = r - 1 > 1$. Z druhé rovnosti pak plyne $2r + s = p$ a $2r - s = 3$, takže $r = 4$, $s = 5$, $p = 13$, $q = 3$.
- ▷ Z $s - r = 3$ vyplývá $2r + s = 3r + 3 = 3(r + 1) > 3$, takže podle druhé rovnosti platí $2r - s < p$ čili $2r - s \in \{1, 3\}$. Kdyby však bylo $2r - s = 3$, vyšlo by $r = 6$, $s = 9$ a $p = 2r + s = 21$, což není prvočíslo. Musí tedy být $2r - s = 1$ a $2r + s = 3p$, takže $r = 4$, $s = 7$, $p = 5$, $q = 11$.

Pokud $d = 3$, musejí být oba činitelé v (4) trojnásobkem čtverců, existují tedy přirozená čísla $1 < r < s$ taková, že platí

$$\begin{aligned} p + q &= 3r^2, \\ p + 4q &= 3s^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Odtud

$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = 3(s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = 3(2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$

Proto $s - r = 1$ a $2r - s = 1$, tedy $r = 2$, $s = 3$ a $p = 7$, $q = 5$.

Ve všech případech nalezené hodnoty p, q a příslušné hodnoty r, s splňují rovnosti (5), resp. (6), výraz (4) je tedy opravdu čtverec.

Úloha má tři řešení (p, q), a to $(13, 3)$, $(5, 11)$, $(7, 5)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu dejte 2 body za rozklad (1), další 2 body za odvození rozkladu (3) a 2 body za dokončení řešení. Při druhém postupu dejte 2 body za nalezení rozkladu (4), 2 body za vyšetření případu $d = 1$ a 2 body za vyšetření případu $d = 3$. Pokud řešitel úlohu nevyřeší, ale zkoušením najde alespoň dvě ze tří řešení, udělte mu 1 bod.

3. Upravujme druhou mocninu výrazu $V = 2a + b + c$, který je zřejmě kladný. Při tom výhodně využijeme daný vztah $ab + bc + ca = 16$:

$$\begin{aligned} V^2 &= (2a + b + c)^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc = \\ &= 4a^2 + b^2 - 2bc + c^2 + 4(ab + bc + ca) = 4a^2 + (b - c)^2 + 4 \cdot 16. \end{aligned}$$

Podle zadání je $a^2 \geqq 9$ a zřejmě $(b - c)^2 \geqq 0$, takže $V^2 \geqq 4 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 100$. Proto $V \geqq 10$.

Zkusme najít taková čísla a, b, c, jež vyhovují zadání a pro něž $V = 10$. Aby v odvozených nerovnostech nastala rovnost, musí být $b = c$ a $a = 3$, takže pak $ab + bc + ca = 6b + b^2$. Hledáme proto $b > 0$ takové, že $6b + b^2 = 16$. Tato kvadratická rovnice má kořeny 2 a -8. Vyhovující trojicí (a, b, c) je tedy $(3, 2, 2)$ a nejmenší možná hodnota daného výrazu je vskutku 10.

Jiné řešení. Z dané rovnosti $ab + bc + ca = 16$ vyjádříme $c = (16 - ab)/(a + b)$ a dosadíme do výrazu V, jehož nejmenší hodnotu hledáme:

$$V = 2a + b + c = 2a + b + \frac{16 - ab}{a + b} =$$
$$= a + b + \frac{16 + a^2}{a + b} \geqq 2\sqrt{16 + a^2} \geqq 2\sqrt{16 + 3^2} = 10.$$

Při první nerovnosti jsme využili známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice kladných čísel $a + b$ a $(16 + a^2)/(a + b)$.

Trojici, pro niž platí $V = 10$, najdeme stejně snadno jako v prvním řešení; rovnost obou průměrovaných čísel nastane, právě když $a + b = \sqrt{16 + a^2}$, což pro $a = 3$ ihned vede k hodnotě $b = 2$, takže ze vzorce $c = (16 - ab)/(a + b)$ dostaneme i $c = 3$.

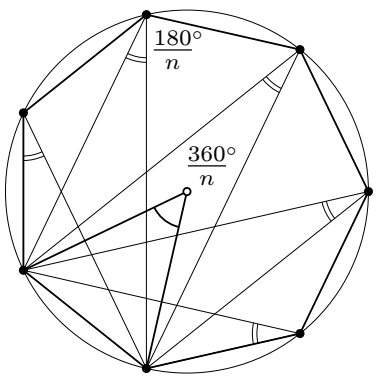
Poznámka. Klíčovou nerovnost $V \geqq 10$ získáme i následující úpravou:

$$V = 2a + b + c = (a + b) + (a + c) \geqq$$
$$\geqq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} = 2\sqrt{a^2 + (ab + bc + ca)} \geqq 2\sqrt{3^2 + 16} = 10,$$

v níž jsme využili nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel $a + b$ a $a + c$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za důkaz, že $V \geqq 10$, a 2 body za nalezení odpovídající trojice čísel a, b, c (třeba i uhodnutím – nebylo úkolem všechny takové trojice najít), jež vyhovuje zadání a pro niž $V = 10$.

4. Ukážeme, že největší možné φ dostaneme, rozmístíme-li body ve vrcholech pravidelného n-úhelníku (obr. 3). V takovém případě má každý uvažovaný trojúhelník opsanou kružnici totožnou s kružnicí opsanou zvolenému n-úhelníku, takže všechny uvažované vnitřní úhly jsou obvodovými úhly příslušnými některé tětivě této kružnice. Nejmenší úhel bude ten ostrý úhel, který přísluší nejkratší tětivě, tj. kterékoli z n shodných stran zvoleného n-úhelníku (všechny ostatní tětivy jsou úhlopříčkami, jsou tedy delší). Jelikož středový úhel příslušný takové straně má velikost $360°/n$, má odpovídající nejmenší úhel v tomto případě velikost $\varphi = 180°/n$.

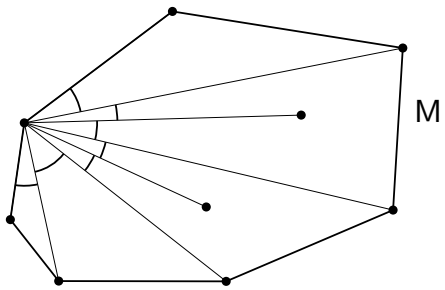


Obr. 3

Zbývá ukázat, že pro libovolné rozmístění n bodů platí $\varphi \leqq 180°/n$. Tvrzení dokážeme sporem. Připusťme, že n daných bodů je rozmístěno tak, že všechny uvažované

úhly jsou větší než $180°/n$. Sestrojme konvexní obal této množiny bodů, tj. nejmenší konvexní mnohoúhelník M, který obsahuje všechny dané body (jež podle zadání neleží v přímce). Označme m počet bodů, které se nacházejí na hranici mnohoúhelníku M. Zřejmě $m \leqq n$ (vrcholy konvexního obalu tvoří podmnožinu dané množiny n bodů).

Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku M je roven $(m-2) \cdot 180°$.[1] Sestrojme úsečku mezi každými dvěma z daných n bodů. Z každého vrcholu mnohoúhelníku M vychází $n-1$ takových úseček. Dvě z nich jsou stranami M a zbývající „dělí“ vnitřní úhel při tomto vrcholu na $n-2$ menších úhlů (obr. 4). Podle předpokladu má každý z těchto



Obr. 4

úhlů velikost větší než $180°/n$, tedy každý vnitřní úhel mnohoúhelníku M je větší než $(n-2) \cdot 180°/n$. Vrcholů je m, takže celkový součet vnitřních úhlů v M je větší než $m(n-2) \cdot 180°/n$. Platí proto následující nerovnost, kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned}
(m-2) \cdot 180° &> m(n-2) \cdot \frac{180°}{n}, \\
n(m-2) &> m(n-2), \\
mn - 2n &> mn - 2m, \\
m &> n.
\end{aligned}$$

To ovšem odporuje nerovnosti $m \leqq n$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz, že pokud jsou body vrcholy pravidelného n-úhelníku, je $\varphi = 180°/n$, a 4 body za důkaz, že vždy platí $\varphi \leqq 180°/n$. Pokud žák odvodí vztah $\varphi \leqq 180°/n$ pouze pro případ, kdy $m = n$ (tedy pro takové konfigurace, v nichž všechny body leží na hranici konvexního obalu), udělte ze 4 bodů pouze 2.

[1] Toto známé tvrzení lze snadno dokázat tak, že m-úhelník rozdělíme na $m-2$ trojúhelníků majících vrcholy v jeho vrcholech, anebo si všimneme, že součet vedlejších úhlů při všech m vrcholech je právě $360°$, takže součet vnitřních úhlů m-úhelníku je $m \cdot 180° - 2 \cdot 180°$.