64. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Celá čísla od 1 do 9 rozdělíme libovolně do tří skupin po třech a pak čísla v každé skupině mezi sebou vynásobíme.

a) Určete tyto tři součiny, jestliže víte, že dva z nich se rovnají a jsou menší než třetí součin.

b) Předpokládejme, že jeden ze tří součinů, který označíme S, je menší než dva ostatní součiny (které mohou být stejné). Najděte největší možnou hodnotu S.

2. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „$-$“ a v ostatních polích „$+$“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, přičemž $2|AB| = 3|CD|$.

a) Najděte bod P uvnitř lichoběžníku tak, aby obsahy trojúhelníků ABP a CDP byly v poměru $3 : 1$ a rovněž obsahy trojúhelníků BCP a DAP byly v poměru $3 : 1$.

b) Pro nalezený bod P určete postupný poměr obsahů trojúhelníků ABP, BCP, CDP a DAP.

4. Řekneme, že kladné reálné číslo je *copaté*, jestliže není přirozené a ve svém dekadickém zápisu obsahuje za desetinnou čárkou jen konečně mnoho nenulových číslic.

a) Najděte příklad dvou *copatých* čísel a, b, pro něž $a \cdot b = 2\,015$.

b) Rozhodněte, zda existují tři *copatá* čísla a, b, c taková, že čísla $a \cdot b$, $b \cdot c$ a $c \cdot a$ jsou všechna přirozená.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 31. března 2015

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Nejdříve vyjádříme součin všech devíti čísel pomocí jeho rozkladu na prvočinitele:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

a) Označme dva z uvažovaných (různých) součinů S a Q, přičemž $S < Q$. Z rovnosti

$$S \cdot S \cdot Q = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

předně vidíme, že prvočísla 5 a 7 musejí být zastoupena v součinu Q, takže $Q = 5 \cdot 7 \cdot x = 35x$, kde x je jedno ze zbylých čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9. Dále vidíme, že v rozkladu dotyčného x musí mít prvočíslo 2 lichý exponent a prvočíslo 3 sudý exponent — tomu vyhovují jen čísla 2 a 8. Pro $x = 2$ ovšem vychází $Q = 35 \cdot 2 = 70 < S = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, což odporuje předpokladu $S < Q$. Proto je nutně $x = 8$, pro něž vychází $Q = 35 \cdot 2 = 280$ a $S^2 = 2^4 \cdot 3^4$ neboli $S = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Trojice součinů je tedy $(36, 36, 280)$.

Zbývá ukázat, že získané trojici skutečně odpovídá rozdělení daných devíti čísel na trojice:

$$S = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36, \quad S = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36, \quad Q = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280.$$

b) Označme uvažované součiny S, Q a R, kde $S < Q$ a $S < R$ (není ovšem vyloučeno, že $Q = R$). V řešení části a) jsme zjistili, že platí rovnost

$$S \cdot Q \cdot R = 70 \cdot 72 \cdot 72.$$

Ukážeme-li tedy, že existuje rozdělení čísel, při kterém $S = 70$ a $R = Q = 72$, bude $S = 70$ hledaná největší hodnota, neboť kdyby při nějakém rozdělení platilo $S \geqq 71$, muselo by být $R \geqq 72$ i $Q \geqq 72$ a také $S \cdot Q \cdot R \geqq 71 \cdot 72 \cdot 72$, což zřejmě odporuje předchozí rovnosti. Najít potřebné rozdělení je snadné:

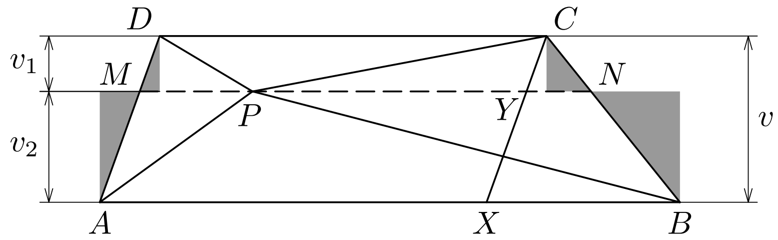
$$S = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70, \quad Q = 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72, \quad R = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

Za systematické a úplné řešení části a) udělte 3 body, z toho pouze 1 bod za náhodné, nezdůvodněné nalezení výsledku. Za systematické a úplné řešení části b) udělte 3 body, z toho pouze 1 bod za náhodné, nezdůvodněné nalezení výsledku.

2. Počty plusů a minusů v tabulce jsou na počátku 63 a 1, tedy dvě lichá čísla. V libovolném čtverci 2×2 mohou být zastoupeny jedním ze způsobů $2 + 2$, $1 + 3$ nebo $0 + 4$ ve vhodném pořadí sčítanců, které se po provedeném kroku změní na pořadí opačné. Vidíme tak, že po jednom kroku se celkové počty plusů a minusů v tabulce buď nezmění, nebo se oba změní o 2, nebo se oba změní o 4, takže to stále budou dvě lichá čísla jako na počátku. Znamená to, že nikdy nemůže být na šachovnici obou znamének stejný počet, totiž sudé číslo 32.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správnou, ale nezdůvodněnou odpověď udělte 1 bod.

3. Předpokládejme, že bod P má požadované vlastnosti. Přímka rovnoběžná se základnami lichoběžníku a procházející bodem P protne ramena AD a BC po řadě v bodech M a N (obr. 1). Označme v výšku daného lichoběžníku, v_1 výšku trojúhelníku CDP a v_2 výšku trojúhelníku ABP.



Obr. 1

a) Protože obsahy trojúhelníků ABP a CDP jsou v poměru $3:1$, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3:1 \qquad \text{neboli} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojic podobných pravoúhlých trojúhelníků plyne, že v právě určeném poměru $2:1$ výšek v_2 a v_1 dělí i bod M rameno AD a bod N rameno BC (v případě pravého úhlu při jednom z vrcholů A či B je to zřejmé rovnou). Tím je konstrukce bodů M a N, a tedy i úsečky MN určena. Nyní zjistíme, v jakém poměru ji dělí uvažovaný bod P.

Protože obsahy trojúhelníků BCP a DAP jsou v poměru $3:1$, platí

$$\Big(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\Big) : \Big(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\Big) = 3:1,$$
$$\frac{|NP|(v_1+v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = 3:1, \qquad |NP| : |MP| = 3:1.$$

Tím je konstrukce (jediného) vyhovujícího bodu P plně popsána.

b) Doplňme trojúhelník DAC na rovnoběžník $DAXC$. Jeho strana CX rozdělí příčku MN na dvě části, a protože $v_1 = \frac{1}{3}v$, můžeme délku příčky MN vyjádřit jako $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$, neboť podle zadání platí $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$. Je proto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pro poměr obsahů trojúhelníků CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \Big(\frac{7}{24}\cdot|CD|\cdot 3v_1\Big) = 1 : \frac{7}{8} = 8:7.$$

Poměr obsahů trojúhelníků BCP a CDP je tudíž $21:8$ a poměr obsahů trojúhelníků ABP a BCP je tak $24:21$. Postupný poměr obsahů trojúhelníků ABP, BCP, CDP a DAP je tedy $24:21:8:7$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V části a) udělte 1 bod za určení poměru $v_1 : v_2 = 1:2$, 1 bod za určení příčky MN a 1 bod za konečné určení bodu P. V části b) udělte 3 body, přičemž strhněte 1 bod, pokud není explicitně stanoven postupný poměr $24:21:8:7$.

4. a) Takových dvojic *copatých* čísel je nekonečně mnoho. Je to např. dvojice

$$a = 2\,015 \cdot \frac{5}{2} = 5\,037{,}5, \quad b = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Podobně vyhovuje každá z nekonečně mnoha dvojic

$$a = 2\,015 \cdot \frac{5^m}{2^n}, \quad b = \frac{2^n}{5^m},$$

kde m a n jsou libovolná přirozená čísla. Uvedené číslo a má n desetinných míst, číslo b jich má m.

b) Taková trojice *copatých* čísel neexistuje.

Každé *copaté* číslo, které má za desetinnou čárkou poslední nenulovou číslici na k-tém místě, tj. na místě řádu 10^{-k}, můžeme pro vhodné přirozené číslo s zapsat jako $s \cdot 10^{-k}$ ($k \geqq 1$). Přitom s není dělitelné deseti, může proto být dělitelné jen jedním z prvočísel 2 nebo 5, a to libovolnou jeho mocninou.

Součinem dvou copatých čísel $a = s/10^k$ a $b = t/10^l$ dostaneme přirozené číslo jen tehdy, když je součin st dělitelný 10^{k+l} neboli když jedno z čísel s, t je dělitelné 2^{k+l} a druhé 5^{k+l}, přičemž $k + l \geqq 2$. Jsou-li tedy $a = s/10^k$, $b = t/10^l$, $c = u/10^m$ libovolná copatá čísla taková, že součiny $a \cdot b$ a $a \cdot c$ jsou přirozená čísla, je z předchozí úvahy zřejmé, že obě čísla t i u musejí být buď obě lichá a dělitelná pěti, nebo naopak obě sudá a nedělitelná pěti, takže jejich součin tu nemůže být dělitelný deseti, tudíž součin $bc = tu/10^{l+m}$ nemůže být celý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyřešení části a) udělte 2 body, za řádný důkaz v části b) udělte 4 body.