Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte všechny možné hodnoty součinu prvočísel p, q, r, pro která platí*

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete všechna přirozená čísla a a b, pro něž je rozdíl $a^2 - b^2$ druhou mocninou některého prvočísla. [$a = (p^2 + 1)/2$ a $b = (p^2 - 1)/2$, kde p je libovolné liché prvočíslo.]

D1. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [C59–S–3]

D2. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [C55–II–4]

2. *Určete, kolika způsoby lze k jednotlivým vrcholům krychle $ABCDEFGH$ připsat čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby součin čísel připsaných libovolným třem vrcholům každé ze stěn krychle byl sudý.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kolika způsoby lze vrcholům čtverce $ABCD$ a jeho středu S připsat čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby byly *vesměs liché* součty čísel u každé jeho strany i obou úhlopříček? Dokážete tento počet určit, aniž vypíšete všechny možnosti a pak je spočítáte? [24 způsobů. Nejprve připište daným pěti bodům 3 znaky L a dva znaky S pro lichá, resp. sudá čísla — to lze udělat právě dvěma vyhovujícími způsoby. Pak uvažte, že znaky L lze zaměnit danými čísly šesti způsoby a znaky S dvěma způsoby.]

D1. Kolika způsoby lze vrcholům pravidelného devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ přiřadit čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bylo přiřazeno jinému vrcholu a aby součet čísel přiřazených každým třem sousedním vrcholům byl dělitelný třemi? [B61–II–2]

3. *Uvažujme výraz*

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž daný výraz nabývá své nejmenší hodnoty.

b) Určete všechny dvojice celých nezáporných čísel x a y, pro které je hodnota daného výrazu rovna číslu 16.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro libovolná reálná čísla x, y a z dokažte nezápornost hodnoty každého z výrazů

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zjistěte rovněž, kdy je dotyčná hodnota rovna nule.

D1. V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + y^2 + x + y = 4$. [B61–S–1]
D2. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2 + ab \leqq ac + bc$. [C63–II–3]
D3. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí $(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2$. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [C58–S–1]
D4. Uvažujme výraz $V(x) = (5x^4 - 4x^2 + 5)/(x^4 + 1)$.
   a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
   b) Najděte největší hodnotu $V(x)$. [C58–II–1]
D5. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[C58-I-6]

4. *Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí*

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.
b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4.

Návodné a doplňující úlohy:
1. Vymyslete pravidlo, jak jednoduše vyjádřit poměr obsahů dvou trojúhelníků, které se shodují v jedné straně či v jedné výšce. Uplatněte je pak k řešení úloh N2 a N3.
2. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Obsahy trojúhelníků ABP, BCP, CDP, DAP označme po řadě S_1, S_2, S_3, S_4. Dokažte obecnou rovnost $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ a vysvětlete, proč speciální rovnost $S_2 = S_4$ nastane, právě když $AB \parallel CD$. [U první rovnosti přejděte k úměře $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$, u druhé k rovnosti obsahů trojúhelníků ABC a ABD.]
3. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L, M tak, že úsečky AK, BL, CM se protínají v jednom bodě P. Dokažte, že oba výrazy

$$\frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} \cdot \frac{|AM|}{|MB|} \quad \text{a} \quad \frac{|PK|}{|AK|} + \frac{|PL|}{|BL|} + \frac{|PM|}{|CM|}$$

se rovnají číslu 1. [Pro první výraz vyjádřete vhodně poměry obsahů trojúhelníků ABP, BCP a CAP. Vyjádříte-li pak, jakými jsou částmi obsahu celého trojúhelníku ABC, a tyto tři zlomky sečtete, dostanete tvrzení o hodnotě druhého výrazu.]

D1. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [C64–I–4]

D2. Označme K a L po řadě body stran BC a AC trojúhelníku ABC, pro které platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť M je průsečík úseček AK a BL. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníků ABM a ABC. [C64–S–2]

D3. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [C55–II–1]

5. *Máme kartičky s čísly 5, 6, 7, ..., 55 (na každé kartičce je jedno číslo). Kolik nejvýše kartiček můžeme vybrat tak, aby součet čísel na žádných dvou vybraných kartičkách nebyl palindrom? (Palindrom je číslo, které je stejné při čtení zleva doprava i zprava doleva.)*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje. [C58–I–5]

D1. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.
   a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
   b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. [C58–II–3]

6. *Je dána kružnice $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, její bod B a kružnice $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je středem úsečky AB a bod K je středem úsečky AC. Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku KLM, jehož vrchol L je jeden z průsečíků kružnic k_1, k_2 a jehož přepona KM leží na přímce AB.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte si Eukleidovy věty o odvěsně a o výšce pravoúhlého trojúhelníku a připomeňte si jejich důkazy na základě podobnosti daného trojúhelníku s dvěma menšími trojúhelníky, které vzniknou jeho rozdělením pomocí výšky ku přeponě.

D1. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l. [C59–S–2]

D2. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [C58–II–4]