66. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Zjistěte, jaké nejmenší kladné celé číslo lze vložit mezi dvojčíslí 20 a 16 tak, aby výsledné číslo $20\ldots16$ bylo násobkem čísla $2\,016$.

2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která lze čísla $1, 2, \ldots, n$ rozdělit do tří disjunktních neprázdných množin s navzájem různými počty prvků tak, že v libovolné dvojici množin má ta s menším počtem prvků větší součet svých prvků. (Má-li množina jeden prvek, považujeme ho za součet všech jejích prvků.)

3. Body D a E jsou (v tomto pořadí) patami výšek z vrcholů B a C ostroúhlého trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že platí $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$. Jakou nejmenší velikost může mít úhel BAC?

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 6. prosince 2016

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Číslo 2 016 je násobkem 9, proto výsledné číslo musí mít ciferný součet dělitelný 9. To nastane, právě když i vkládané číslo bude mít ciferný součet dělitelný 9 neboli to bude násobek devíti. Vyzkoušíme postupně kladné násobky čísla 9 od nejmenšího: čísla 9, 18, 27 nevyhovují (namísto přímého dělení číslem 2 016 se stačí přesvědčit, že čísla 20 916, 201 816 ani 202 716 nejsou — podle svých posledních čtyřčíslí — dělitelná číslem 16, zato číslo 2 016 ano), ale $203\,616 = 2\,016 \cdot 101$. Hledaným nejmenším číslem je tedy 36.

Poznámka. Protože 2 016 je násobkem šestnácti, lze postupné hledání nejmenšího vyhovujícího čísla také založit na následujícím zřejmém poznatku: číslo s posledním dvojčíslím 16 (tj. číslo tvaru $100k + 16$) je dělitelné šestnácti, právě když je jeho předposlední dvojčíslí (tedy poslední dvojčíslí příslušného k) dělitelné čtyřmi.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (i v případě, že neobsahuje úvahy o dělitelnosti čísly 9 ani 16: je možné např. postupně vkládat čísla $1, 2, \ldots, 36$). Neúplné řešení: 3 body za zdůvodnění toho, že vkládané číslo musí být dělitelné devíti, resp. čtyřmi; 1 bod za ověření, že číslo 36 splňuje podmínku ze zadání.

2. Malá čísla n vyloučíme postupně následujícími úvahami.

Vytvořené tři množiny musejí mít navzájem různé počty prvků, a to je možné jen pro $n \geqq 1 + 2 + 3 = 6$.

Pro $n = 6$ bude v nejmenší množině jen jeden prvek, proto součet jejích prvků bude nejvýše 6. Přitom součet pěti čísel mimo tuto množinu je alespoň 15, takže součet prvků některé ze zbylých dvou množin je alespoň 8, tudíž větší než číslo z jednoprvkové množiny, což odporuje požadavku úlohy. Podobnou úvahou vyloučíme i čísla $n = 7$ a $n = 8$, pro něž také jedno číslo musí tvořit celou jednu množinu.

Pro $n = 9$ je hledané rozdělení např. $\{9, 8\}$, $\{7, 6, 3\}$, $\{5, 4, 2, 1\}$.

Pro $n = 10$ musejí být v nejmenší množině dva prvky, jejich součet je nejvýše 19. Přitom součet ostatních čísel je 36, a jelikož součty prvků zbývajících dvou množin nejsou stejné, musí jeden z nich být alespoň 19, což dává spor. Podobně odvodíme spor i pro $n = 11$.

Nyní popíšeme vyhovující rozdělení pro každé číslo $n \geqq 12$, které podle dělení třemi se zbytkem zapíšeme ve tvaru $n = 3k + r$, kde $k \geqq 4$ a $r \in \{0, 1, 2\}$. Počty prvků tří množin zvolíme v rostoucím pořadí $k - 1$, k a $k + r + 1$, když do první množiny M_1 zařadíme $k-1$ největších čísel z $\{1, 2, \ldots, n\}$ (tedy čísla od $n-k+2$ do n včetně), druhou množinu M_2 pak sestavíme z k předchozích největších čísel (tedy z čísel od $n - 2k + 2$ do $n - k + 1$) a zbylých $k + r + 1$ nejmenších čísel pak vytvoří množinu M_3.

Protože všechna čísla z M_1 jsou větší než všechna čísla z množiny M_2, která má pouze o 1 prvek méně než M_1, stačí ukázat, že součet tří největších čísel z M_1 je větší než součet čtyř nejmenších čísel z M_2, a bude jasné, že taková nerovnost platí i pro součty všech čísel z M_1 a M_2. Zmíněná tři a čtyři čísla skutečně existují (neboť $k \geqq 4$) a potřebná nerovnost $n + (n-1) + (n-2) > (n-2k+2) + (n-2k+3) + (n-2k+4) + (n - 2k + 5)$ je ekvivalentní nerovnosti $8k - n > 17$, jež po dosazení $n = 3k + r$ přejde v nerovnost $5k > 17 + r$. Ta platí, neboť $5k \geqq 20$ a $17 + r \leqq 19$. Podobně vysvětlíme, že množina M_2 má větší součet prvků než množina M_3, jež má oproti M_2 o $r + 1$ prvků více: dvě největší čísla v M_2 mají určitě součet větší než $r + 3$ nejmenších čísel v M_3, neboť $(n - k + 1) + (n - k) = 2(3k + r - k) + 1 = 4k + 2r + 1 \geqq 17 > 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Úloze vyhovují všechna celá čísla $n \geqq 12$ a $n = 9$.

Jiné řešení. Ukážeme, jak vyloučit malá nevyhovující čísla n obecnější úvahou. Předpokládejme tedy, že pro nějaké kladné celé číslo n požadované rozdělení existuje. Označme jednotlivé množiny M_1, M_2 a M_3 v pořadí podle jejich rostoucí mohutnosti. Označíme-li p počet prvků v množině M_1, jež má součet prvků největší, bude platit $p + (p+1) + (p+2) \leqq n$, tedy

$$p \leqq \frac{n}{3} - 1. \tag{1}$$

Druhou důležitou nerovnost získáme pozorováním, že součet s_1 prvků v M_1 je nejvýše $n + (n-1) + \ldots + (n-p+1) = \frac{1}{2}p(2n-p+1)$ a zároveň musí být větší než součty prvků s_2 a s_3 ve zbylých dvou množinách. S ohledem na celočíselnost těchto tří součtů dostáváme

$$1 + 2 + \ldots + n = s_1 + s_2 + s_3 \leqq s_1 + (s_1 - 1) + (s_1 - 2) = 3s_1 - 3,$$

tudíž $\frac{1}{6}n(n+1) + 1 \leqq s_1$. Porovnáním obou odhadů pro s_1 dostaneme nerovnost

$$\tfrac{1}{6}n(n+1) + 1 \leqq \tfrac{1}{2}p(2n - p + 1)$$

neboli

$$n^2 + n(1 - 6p) + 3p^2 - 3p + 6 \leqq 0. \tag{2}$$

Je-li $p = 1$, platí dle (1) $n \geqq 6$ a (2) se redukuje na nerovnost $n^2 - 5n + 6 \leqq 0$, která však pro žádné $n \geqq 6$ neplatí.

Je-li $p = 2$, platí dle (1) $n \geqq 9$ a (2) se redukuje na nerovnost $n^2 - 11n + 12 \leqq 0$, která neplatí pro žádné $n \geqq 10$. Případ $p = 2$ je tak možný jedině pro $n = 9$, jež skutečně vyhovuje (viz původní řešení). Pro další vyhovující n proto musí být $p \geqq 3$, tedy podle (1) $n \geqq 12$.

Nyní jiným způsobem ukážeme, že množiny M_1, M_2, M_3 sestrojené v původním řešení pro každé $n \geqq 12$ vyhovují, a to přímým vyjádřením odpovídajících rozdílů $s_1 - s_2$ a $s_2 - s_3$, o nichž máme ukázat, že jsou oba kladné. Využijeme k tomu opět vyjádření $n = 3k + r$ a prvky navržených množin zapíšeme do řádků v *klesajícím* pořadí:

$$\begin{array}{lccccccc}
\mathsf{M}_1: & 3k+r & 3k+r-1 & \ldots & 2k+r+2 & & & \\
\mathsf{M}_2: & 2k+r+1 & 2k+r & \ldots & k+r+3 & k+r+2 & & \\
\mathsf{M}_3: & k+r+1 & k+r & \ldots & r+3 & r+2 & r+1 & \ldots
\end{array}$$

(Tři tečky v posledním řádku znamenají čísla $r, \ldots, 1$ v případě $r > 0$.)

Všimněme si, že pod sebou zapsané prvky množin M_1 a M_2 mají týž rozdíl, rovný číslu $k - 1$. Takových dvojic je $k - 1$, přitom v množině M_2 je „navíc" poslední (k-té) číslo $k + r + 2$. To vede k prvnímu ze vzorců

$$s_1 - s_2 = (k-1)^2 - (k + r + 2), \quad s_2 - s_3 = k^2 - \sum_{j=1}^{r+1} j,$$

druhý vzorec se dokáže podobnou úvahou o prvcích množin M_2 a M_3, rovněž zapsaných pod sebou. Že jsou oba získané rozdíly za předpokladů $k \geqq 4$ a $r \in \{0, 1, 2\}$ kladné, je zřejmé:

$$\begin{aligned}
s_1 - s_2 &\geqq (k-1)^2 - (k+4) = k(k-3) - 3 \geqq 4 \cdot 1 - 3 = 1,\\
s_2 - s_3 &\geqq k^2 - (1+2+3) \geqq 4^2 - 6 = 10.
\end{aligned}$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů rozdělených takto:
2 body za důkaz neexistence rozdělení pro $n < 12$, $n \neq 9$ (pokud důkaz pro některé n chybí, dejte za tuto část nejvýše 1 bod; pokud řešitel vyloučí pouze případy $n < 6$, tak 0 bodů);
1 bod za důkaz existence vhodného rozdělení pro $n = 9$;
3 body za důkaz existence vhodného rozdělení pro $n \geqq 12$ (v neúplném řešení nejvýše 1 bod za popis vyhovujícího rozdělení, pokud chybí zdůvodnění správnosti).

3. Po dosazení délek úseků AE, AD, BE, CD vyjádřených pomocí délek b a c stran trojúhelníku ABC a kosinu úhlu $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ do rovnosti ze zadání dostaneme

$$b\cos\alpha \cdot c\cos\alpha = (c - b\cos\alpha)(b - c\cos\alpha),$$

neboli $bc = (b^2 + c^2)\cos\alpha$. Odtud

$$\cos\alpha = \frac{bc}{b^2 + c^2} \leqq \frac{1}{2},$$

kde poslední nerovnost je pro libovolná kladná čísla b a c ekvivalentní zřejmé nerovnosti $(b - c)^2 \geqq 0$ (lze se rovněž odvolat na AG-nerovnost pro dvojici čísel b^2 a c^2). Dokázali jsme tak, že pro úhel α libovolného trojúhelníku ABC vyhovujícího zadání úlohy platí $\cos\alpha \leqq 1/2$ neboli $\alpha \geqq 60°$. Protože ke zmíněným vyhovujícím trojúhelníkům zřejmě patří i každý rovnostranný trojúhelník (v němž jsou totiž AE, AD, BE, CD čtyři shodné úsečky), je $\alpha = 60°$ hledané minimum.

Jiné řešení. Označme délky úseků AE, EB, AD, DC postupně p, q, r, s. Podle předpokladu ze zadání platí $pr = qs$. Z mocnosti bodu A k Thaletově kružnici nad průměrem BC, která prochází body D a E, pro délky těchto úseků dostaneme

$$p(p + q) = r(r + s).$$

Po vyjádření $s = pr/q$ z prvního vztahu, dosazení do druhého a po zjednodušení dostaneme $pq = r^2$. Označme S střed strany AB a c její délku. Platí

$$r^2 = pq = |AE| \cdot |BE| = \left(\frac{c}{2} + |SE|\right)\left(\frac{c}{2} - |SE|\right) = \frac{c^2}{4} - |SE|^2,$$

proto $r^2 \leqq c^2/4$ neboli $r/c \leqq 1/2$. Podíl $r/c = |AD|/|AB|$ je však z pravoúhlého trojúhelníku ABD roven kosinu zkoumaného úhlu BAC, takže jsme odvodili stejnou nerovnost jako v původním řešení, jehož závěr již opakovat nebudeme.

Jiné řešení. Ještě jedním, poněkud pracnějším algebraickým výpočtem odvodíme klíčovou nerovnost $\cos\alpha \leqq 1/2$ pro úhel $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ každého trojúhelníku ABC vyhovujícího zadání úlohy. Vyjádříme obecně délky úseků AE, AD, BE, CD pomocí délek stran trojúhelníku ABC (standardně označených a, b, c). Díky kosinové větě platí

$$|AE| = |AC| \cdot \cos\alpha = b \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

a analogicky také

$$|AD| = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \qquad |BE| = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \qquad |CD| = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}.$$

Dosazením získaných rovností do vztahu ze zadání a jeho následném vynásobení společným jmenovatelem $4bc$ dostaneme polynomickou rovnost, kterou nyní zapíšeme a upravíme:

$$
\begin{aligned}
\bigl(b^2+c^2-a^2\bigr)^2 &= \bigl(a^2-b^2+c^2\bigr)\bigl(a^2+b^2-c^2\bigr),\\
a^4+b^4+c^4-2a^2\bigl(b^2+c^2\bigr)+2b^2c^2 &= a^4-\bigl(b^2-c^2\bigr)^2,\\
2(b^4+c^4) &= 2a^2(b^2+c^2),\\
a^2 &= \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}.
\end{aligned}
$$

Takto určenou hodnotu a^2 dosadíme do již dříve užitého vyjádření $\cos\alpha$:

$$
\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-\dfrac{b^4+c^4}{b^2+c^2}}{2bc} = \frac{bc}{b^2+c^2} \leqq \frac{1}{2}.
$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za zdůvodnění $\alpha \geqq 60°$ a 1 bod za výslovnou zmínku o tom, že rovnostranný trojúhelník vyhovuje zadání. Neúplné řešení: za odvození nerovnosti $\cos\alpha \leqq 1/2$ dávejte 4 body; za odvození rovnosti, ze které je možné bez dalších geometrických úvah shora odhadnout velikost $\cos\alpha$, nejvýše 2 body (pokud tento odhad chybí). Za triviální použití kosinové věty, ze kterého řešitel neodvodil vztah umožňující horní odhad velikosti úhlu α, je 0 bodů.