

## 66. ročník matematické olympiády

### Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Na tabuli je napsáno pět navzájem různých kladných čísel. Určete, kolika nejvýše způsoby se z nich dá sestavit dvojice, jejíž součet se rovná některému z pěti čísel napsaných na tabuli.
2. Na odvěsnách  $AC$  a  $BC$  daného pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  určete po řadě body  $K$  a  $L$  tak, aby součet

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nabýval nejmenší možné hodnoty, a vyjádřete ji pomocí  $c = |AB|$ .

3. Napíšeme za sebou 1 000 přirozených čísel, která mají vlastnosti: součet každých sedmi po sobě zapsaných čísel je 2 017, na 123. místě je číslo 123, na 234. místě číslo 234 a na 345. místě číslo 345. Určete součet čtyř čísel na 456., 567., 678. a 789. místě.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

**v úterý 31. ledna 2017**

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

## 66. ročník matematické olympiády

### Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

**1.** Označme  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  kladná čísla napsaná na tabuli. Nejmenší čísla  $a_1$  ani  $a_2$  zřejmě nemohou být součtem žádných dvou na tabuli napsaných čísel. Číslo  $a_3$  lze jako součet některé dvojice dostat nejvýše jedním způsobem, a to  $a_3 = a_1 + a_2$ . Číslo  $a_4$  sice můžeme dostat třemi způsoby:  $a_1 + a_2$ ,  $a_2 + a_3$  nebo  $a_1 + a_3$ , ale protože je  $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3$ , může být  $a_4$  součtem nejvýše jedné z dvojic  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{a_1, a_3\}$ ,  $\{a_2, a_3\}$ . Konečně číslo  $a_5$  lze takto získat nejvýše dvěma způsoby. Kdybychom totiž  $a_5$  získali třemi způsoby coby součet dvou čísel napsaných na tabuli, bylo by alespoň jedno z čísel  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sčítancem ve dvou různých součtech, což není možné.

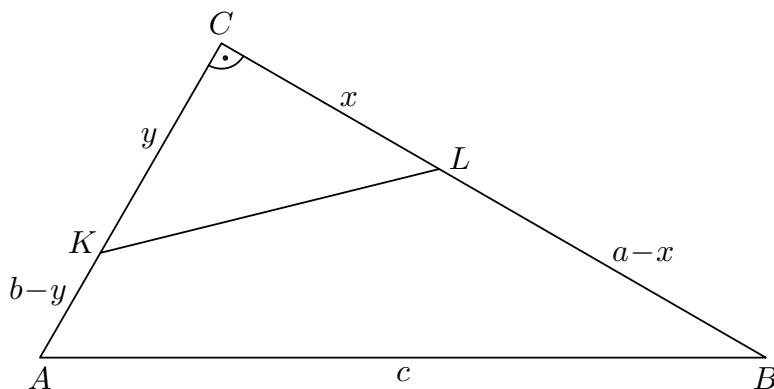
Dohromady jsme tak zjistili, že počet vyhovujících dvojic nikdy nepřevyšší součet  $0 + 0 + 1 + 1 + 2$ , který je roven čtyřem.

Příkladem pětice čísel napsaných na tabuli, pro něž součty čtyř (z nich vytvořených) dvojic jsou rovněž na tabuli uvedeny, je  $a_i = i$  pro  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , kdy  $1 + 2 = 3$ ,  $1 + 3 = 4$ ,  $1 + 4 = 5$  a  $2 + 3 = 5$ .

*Závěr.* Z daných pěti různých kladných čísel lze sestavit nejvýše čtyři dvojice požadované vlastnosti.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za získání odhadu, že vhodných dvojic není více než čtyři, dejte 4 body. (Za odhad, že dvojic je nejvýše šest, protože největší číslo ve dvojici být nemůže, body nedávejte.) Za příklad pětice čísel se čtyřmi vyhovujícími dvojicemi dejte 2 body, a to i v případě, že se řešiteli nepodaří horní odhad dokázat.

**2.** Ve shodě s obr. 1 označme  $x = |CL|$ ,  $y = |CK|$ , potom  $|BL| = a - x$ , a  $|AK| = b - y$ , kde  $a, b$  značí po řadě délky odvěsen  $BC, AC$ .



Obr. 1

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku  $KLC$  dostaneme  $|KL|^2 = x^2 + y^2$ , takže zkoumaný součet můžeme upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 |AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 &= (b - y)^2 + x^2 + y^2 + (a - x)^2 = \\
 &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = \\
 &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} = \\
 &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Díky nezápornosti druhých mocnin odtud vidíme, že zkoumaný výraz nabývá své nejmenší hodnoty, totiž  $\frac{1}{2}c^2$ , právě když  $x = \frac{1}{2}a$  a současně  $y = \frac{1}{2}b$ , tedy právě když body  $K, L$  jsou po řadě středy odvěsen  $AC, BC$  daného pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$ .

*Závěr.* Nejmenší možná hodnota zkoumaného součtu je rovna  $\frac{1}{2}c^2$ . Tuto hodnotu dostaneme, právě když body  $K, L$  budou po řadě středy odvěsen  $AC, BC$  daného pravoúhlého trojúhelníku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyjádření zkoumaného součtu pomocí dvou vhodně zvolených parametrů. Za následnou úpravu do tvaru s druhými mocninami, z něhož je hledaná nejmenší hodnota a také příslušná poloha bodů  $K$  a  $L$  zřejmá, udělte další 3 body. Za uvedení správné odpovědi pro polohu obou hledaných bodů  $K, L$  a vyjádření nejmenší hodnoty zkoumaného výrazu pomocí  $c$  udělte 1 bod.

**3.** Označme po sobě napsaná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ . Vzhledem k tomu, že součet každých sedmi po sobě napsaných čísel je roven témuž číslu 2017, porovnáním dvou takových součtů s šesti společnými sčítanci

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+5} + a_{i+6} = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+6} + a_{i+7}$$

dojdeme k závěru, že rovnost  $a_i = a_{i+7}$  platí pro každý přípustný index  $i$ , takže uvažovaná číselná posloupnost  $(a_i)$  má periodu délky 7. Platí tedy  $a_1 = a_8 = a_{15} = \dots$ ,  $a_2 = a_9 = a_{16} = \dots$ , apod. Protože indexy 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789 členů této posloupnosti dávají v určitém pořadí všech sedm možných zbytků při dělení sedmi, je součet členů s těmito sedmi indexy roven součtu libovolných sedmi po sobě jdoucích členů této posloupnosti, tj. 2017. Odtud již pro  $a_{123} = 123$ ,  $a_{234} = 234$  a  $a_{345} = 345$  bezprostředně plyne

$$a_{456} + a_{567} + a_{678} + a_{789} = 2017 - (a_{123} + a_{234} + a_{345}) = 2017 - 702 = 1315.$$

*Závěr.* Hledaný součet je 1315.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za objev, že posloupnost má periodu délky 7 (i bez zdůvodnění ze vzorového řešení, které lze totiž považovat za zřejmé). Další 2 body udělte za poznatek, že sedm zadaných indexů má různé zbytky při dělení sedmi, 1 bod pak za jeho důsledek, že sedm dotyčných členů dává součet 2017, a zbylý 1 bod udělte za dopočet hledaného součtu.