66. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Liberec, 26.–29. března 2017

1. *Na hromádce leží 100 očíslovaných diamantů, z nichž 50 je pravých a 50 falešných. Pozvali jsme svérázného znalce, který jediný dovede rozpoznat, které jsou které. Pokaždé, když mu ukážeme nějaké tři diamanty, řekne čísla dvou z nich a (pravdivě) oznámí, zda jsou pravé oba, jeden, nebo žádný. Rozhodněte, zda můžeme zaručeně odhalit všechny pravé diamanty bez ohledu na to, jak znalec volí posuzované dvojice.*

(Michal Rolínek, Josef Tkadlec)

Řešení. Ukážeme strategii znalce, při níž se nám odhalit všech 50 pravých diamantů nepodaří. Znalec si zapamatuje jeden pravý diamant P a jeden falešný diamant F (třeba první pravý a první falešný diamant, které jsou mu předloženy). Kdykoli je tázán na trojici, v níž je právě jeden diamant z dvojice P a F, vyjádří se o zbylých dvou. Pokud jsou v trojici P i F, pak vybere právě je a pravdivě o nich řekne, že jeden z nich je pravý. Pokud v trojici není ani P, ani F, postupuje libovolně.

Při popsané strategii nelze zjistit, který z kamenů P a F je pravý a který falešný, neboť je žádná ze znalcových odpovědí nerozliší.

2. *Najděte všechny dvojice reálných čísel k, l takové, že nerovnost*

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

platí pro délky stran a, b, c libovolného trojúhelníku. (Patrik Bak)

Řešení. Předpokládejme, že daná nerovnost pro nějakou dvojici k, l platí pro délky stran a, b, c libovolného trojúhelníku. Když do ní dosadíme $a = 1$, $c = 1$ a libovolné kladné $b < 2$ (trojúhelník s takovými délkami stran zjevně existuje), dostaneme nerovnost $k + lb^2 > 1$. Kdyby bylo $k < 1$, snadno bychom našli $b > 0$ dostatečně malé na to, aby tato nerovnost už neplatila, proto musí být $k \geqq 1$. Analogicky musí být $l \geqq 1$.

V ortonormální souřadnicové soustavě zvolme body $A[-1, 0]$, $B[1, 0]$, $C[x, y]$; body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku pro libovolné reálné x a libovolné reálné $y \neq 0$ a až na podobnost tak lze umístit libovolný trojúhelník. Po dosazení délek stran trojúhelníku ABC (snadno je vypočteme z Pythagorovy věty) přejde zadaná nerovnost do tvaru

$$k\big((x-1)^2 + y^2\big) + l\big((x+1)^2 + y^2\big) > 4$$

neboli

$$(k + l)x^2 + 2(l - k)x + k + l - 4 > -(k + l)y^2. \tag{1}$$

Ta musí platit pro každé x a libovolné $y \neq 0$. Přitom pro pevné x dokážeme volbou hodnoty y dosáhnout libovolné záporné hodnoty výrazu $V(y) = -(k + l)y^2$ na pravé straně předchozí nerovnosti, neboť (jak už víme) $k + l > 0$. Proto musí pro každé x platit

$$(k + l)x^2 + 2(l - k)x + (k + l - 4) \geqq 0, \tag{2}$$

což vzhledem ke kladnému koeficientu u mocniny x^2 na levé straně nastane, právě když příslušný diskriminant $D = 4(l - k)^2 - 4(k + l - 4)(k + l)$ není kladný. Nerovnost $D \leqq 0$ snadno upravíme na ekvivalentní podmínku $kl \geqq k + l$.

Zjistili jsme tedy, že pokud daná nerovnost platí pro libovolnou trojici délek stran trojúhelníku, splňují čísla k a l kromě nerovností $k \geqq 1$ a $l \geqq 1$ i podmínku

$$kl \geqq k + l. \tag{3}$$

Z úvahy o diskriminantu obráceně plyne, že pokud čísla $k \geqq 1$ a $l \geqq 1$ podmínku (3) splňují, platí nerovnost (2) pro každé reálné x. Protože pro taková k, l je hodnota $V(y)$

pro každé $y \neq 0$ záporná, vyplývá z platnosti (2) pro libovolné x nerovnost (1) pro všechny přípustné dvojice x, y, a ta už je ekvivalentní zadané vlastnosti. Uvedená podmínka je tedy i postačující.

Konjunkce nerovností $k \geqq 1$, $l \geqq 1$ a $kl \geqq k+l$ je tedy podmínka nutná i postačující. Protože ze třetí nerovnosti plyne $k \neq 1$ (stejně jako $l \neq 1$), můžeme hledanou množinu vyhovujících dvojic (k, l) zapsat zřejmě takto:

$$\{(k,l)\colon k > 1 \wedge l \geqq k/(k-1)\}.$$

Jiné řešení. Předpokládejme, že daná nerovnost pro nějakou dvojici k, l platí pro délky stran a, b, c libovolného trojúhelníku. Z platnosti nerovnosti pro trojúhelník, v němž $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$ plyne, že $k + l > 2$, čili alespoň jedno z čísel k, l musí být větší než 1. Nechť je tedy například $k > 1$ (případ $l > 1$ se posoudí analogicky).

Podle kosinové věty platí $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Dosazením do zadané nerovnosti dostaneme po úpravě ekvivalentní nerovnost

$$a^2(k-1) + b^2(l-1) + 2ab\cos\gamma > 0.$$

Díky předpokladu $k > 1$ lze pro libovolné $\gamma \in (90°, 180°)$ zvolit trojúhelník s tupým úhlem γ a se stranami $a = -\cos\gamma > 0$ a $b = k - 1$. Dosazením do poslední nerovnosti po jednoduché úpravě vidíme, že pro čísla k a l musí platit $(k-1)(l-1) > \cos^2\gamma$. Přitom pro $\gamma \in (90°, 180°)$ může výraz $\cos^2\gamma$ nabýt každou hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Aby poslední nerovnost platila pro všechny zmíněné hodnoty úhlu γ, musí nutně platit $(k-1)(l-1) \geqq 1$. A jelikož $k > 1$, musí být i $l > 1$.

Dokážeme, že spolu s oběma podmínkami $k > 1$ a $l > 1$ je odvozená podmínka

$$(k-1)(l-1) \geqq 1 \tag{4}$$

i postačující. Při jejich splnění jsou čísla $a^2(k-1)$ a $b^2(l-1)$ kladná, a platí tak pro ně nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, proto

$$\begin{aligned} a^2(k-1) + b^2(l-1) + 2ab\cos\gamma &\geqq 2ab\sqrt{(k-1)(l-1)} + 2ab\cos\gamma \geqq \\ &\geqq 2ab + 2ab\cos\gamma = 2ab(1+\cos\gamma) > 0, \end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen.

Popišme tentokrát hledanou množinu vyhovujících dvojic (k, l) geometricky, a to body se souřadnicemi $[k, l]$ v kartézské soustavě souřadnic Okl. Rovnost ve (4) popisuje rovnoosou hyperbolu se středem v bodě $[1, 1]$ a asymptotami o rovnicích $k = 1$ a $l = 1$. Proto nerovnost (4) spolu s podmínkami $k > 1$ a $l > 1$ určuje část prvního kvadrantu „nad“ tou větví hyperboly, která v něm celá leží, přitom samotné body větve do vymezené množiny, kterou jsme měli najít, rovněž patří.

Jiné řešení. Vysvětleme nejdříve, že dvojice reálných čísel (k, l) má požadovanou vlastnost, právě když pro libovolná kladná čísla a, b platí

$$ka^2 + lb^2 \geqq (a+b)^2. \tag{5}$$

Tato podmínka je jistě postačující, neboť pro strany a, b, c každého trojúhelníku platí $a + b > c > 0$, a tedy i $(a+b)^2 > c^2$, což spolu s (5) vede k nerovnosti ze zadání úlohy. Kdyby naopak pro některá kladná čísla a, b nerovnost (5) neplatila, byla by soustava nerovností

$$ka^2 + lb^2 < x^2 < (a+b)^2$$

splněna pro každé x z nějakého otevřeného intervalu s pravým krajním bodem $a+b$, a tak bychom v něm jistě našli $x=c$ větší než $|a-b|$, neboť $|a-b|<a+b$. Trojúhelník se stranami a, b, c by pak nesplňoval nerovnost ze zadání úlohy. Naše podmínka spojená s nerovností (5) je tak nejen postačující, ale i nutná k tomu, aby dvojice čísel (k,l) vyhovovala zadání.

Upravíme-li nerovnost (5), která má platit pro všechna $a,b>0$, do tvaru

$$(k-1)a^2+(l-1)b^2 \geqq 2ab, \tag{6}$$

vidíme, že je nutně $k>1$, neboť v případě $k \leqq 1$ by levá strana (6) při pevném $b>0$ byla v proměnné $a \in (0,\infty)$ shora omezená, zatímco pravá strana nikoli. Stejně tak je nutně $l>1$. Proto lze nerovnost (6) upravit do tvaru

$$\bigl(a\sqrt{k-1}-b\sqrt{l-1}\bigr)^2 \geqq 2\bigl(1-\sqrt{(k-1)(l-1)}\bigr)ab.$$

Ukažme, že za předpokladu $k,l>1$ poslední nerovnost platí pro všechna $a,b>0$, právě když je $(k-1)(l-1) \geqq 1$. Nutnost této podmínky plyne dosazením (kladných) hodnot $a=\sqrt{l-1}$ a $b=\sqrt{k-1}$, její dostatečnost je zřejmá z toho, že pravá strana pak bude nekladná, zatímco levá strana je nezáporná. Dospěli jsme tak ke stejnému vymezení vyhovujících dvojic (k,l) jako v předchozím řešení.

---

3. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí*

$$f(y-xy)=f(x)y+(x-1)^2f(y).$$

(Pavel Calábek)

Řešení. Dosazením $x=1$ dostaneme, že pro všechna reálná y platí $f(0)=f(1)y$, tedy nutně $f(0)=f(1)=0$. Dosazením $y=1$ do dané rovnice pak pro každé x dostaneme

$$f(1-x)=f(x).$$

Nechť t je libovolné reálné číslo, dosazením $x=1-t$ dostaneme

$$f(ty)=f(1-t)y+t^2f(y)=f(t)y+t^2f(y) \tag{1}$$

pro každé reálné y. Záměnou proměnných t a y dále získáme

$$f(y)t+y^2f(t)=f(yt)=f(ty)=f(t)y+t^2f(y),$$

takže $f(t)(y^2-y)=f(y)(t^2-t)$, což pro $y=2$ dává

$$f(t)=\tfrac{1}{2}f(2)(t^2-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením do původní rovnice ze zadání snadno ověříme, že konstanta $a=f(2)/2$ v odvozeném předpisu $f(x)=ax(x-1)$ může být libovolné reálné číslo:

$$\begin{aligned} f(x)y+(x-1)^2f(y) &= ax(x-1)y+(x-1)^2ay(y-1)= \\ &= a(x-1)y(x+xy-x-y+1)= \\ &= a(1-x)y\bigl((1-x)y-1\bigr)=f\bigl((1-x)y\bigr)=f(y-xy). \end{aligned}$$

4. *Každé posloupnosti složené z n nul a n jedniček přiřadíme číslo, které je počtem maximálních úseků stejných číslic v ní. (Například posloupnost* 00111001 *má 4 takové úseky* 00, 111, 00, 1.*) Pro dané n sečteme všechna čísla přiřazená jednotlivým takovým posloupnostem. Dokažte, že výsledný součet je roven*

$$(n+1)\binom{2n}{n}.$$

(Patrik Bak)

Řešení. Uvažujme konkrétní posloupnost a počítejme zleva, kolik úseků obsahuje. Nový úsek započítáme po jeho ukončení, tedy když narazíme na změnu číslice nebo na pravý okraj. Počet úseků v posloupnosti je tudíž o jedna větší než počet těch jejích číslic, kterým předchází odlišná číslice (budeme říkat, že v místech takových číslic nastává *změna úseku*). Místo abychom počítali úseky v jednotlivých posloupnostech, budeme počítat posloupnosti, které v daném místě změnu úseku obsahují.

Možných míst pro změnu úseku je $2n-1$ (všechna místa kromě prvního), pro volbu číslice v místě změny úseku jsou dvě možnosti, přičemž předchozí číslice je tím jednoznačně určena. Na zbývajících místech je v každé takové posloupnosti libovolně rozmístěno $n-1$ jedniček a $n-1$ nul, daná změna úseku se proto nachází v $\binom{2n-2}{n-1}$ různých posloupnostech. Celkově tak máme $2(2n-1)$ různých změn úseků a každá je obsažena v $\binom{2n-2}{n-1}$ posloupnostech. K tomu je třeba přičíst jednotku za každou posloupnost kvůli úsekům končícím na pravém okraji; posloupností je přitom $\binom{2n}{n}$. Dohromady tak pro výsledný součet dostáváme

$$\begin{aligned}2(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}+\binom{2n}{n}&=2n\binom{2n-1}{n}+\binom{2n}{n}=\\&=2n\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n}{n}=n\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n},\end{aligned}$$

kde jsme dvakrát využili zřejmou identitu

$$k\binom{m}{k}=m\binom{m-1}{k-1}.$$

Jiné řešení. Využijeme úvodní úvahu z předchozího řešení, z níž vyplývá, že výsledný součet je roven součtu počtu možných posloupností a počtu dvojic 01 a 10 v nich dohromady obsažených. Ze symetrie je jasné, že stačí určit jen počet dvojic 01 a výsledek vynásobit dvěma.

Uvažme posloupnost, která obsahuje přesně k dvojic 01. Tyto dvojice rozdělují zbytek posloupnosti na $k+1$ úseků, přičemž v každém je nezáporný počet nul a jedniček v jednoznačně určeném pořadí (vždy nejprve případné jedničky a pak případné nuly). Stačí proto určit počet způsobů rozmístění $n-k$ nul a $n-k$ jedniček do $k+1$ úseků; podle známého vzorce pro kombinace s opakováním je to $\binom{n}{k}$ možností pro nuly a $\binom{n}{k}$ možností pro jedničky, čili celkem $\binom{n}{k}^2$ možností. Celkový součet je tedy

$$2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2+\binom{2n}{n}. \tag{1}$$

K závěrečnému důkazu, že (1) dává požadovaný výsledek, využijeme známou identitu $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ a symetrii $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ kombinačních čísel:

$$2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{n-k}^2=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2+\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=n\binom{2n}{n}.$$

Dosazením do (1) tak pro hledaný součet dostáváme $n\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n}$.

Jiné řešení. Pro $n=1$ je tvrzení zřejmé. Nechť $n\geqq 2$. Pro každý možný úsek stejných číslic spočítáme, v kolika posloupnostech se na daném místě nachází. Zřejmě stačí uvažovat jen úseky nul a výsledek pak vynásobit dvěma.

Vezměme tedy úsek k nul, kde $1\leqq k\leqq n$. Pokud se tento úsek nachází na jednom z obou krajů, ohraničuje ho právě jedna jednička a na zbývajících $2n-k-1$ místech je libovolně rozmístěno $n-k$ nul a $n-1$ jedniček. Pokud se úsek nachází na jedné ze zbývajících $2n-k-1$ pozic, je ohraničen z každé strany jedničkou a na zbývajících $2n-k-2$ místech je libovolně rozmístěno $n-k$ nul a $n-2$ jedniček. Příspěvek p_k maximálních úseků tvořených k nulami do zkoumaného součtu je tedy

$$p_k=2\binom{2n-k-1}{n-1}+(2n-k-1)\binom{2n-k-2}{n-2}=$$
$$=2\binom{2n-k-1}{n-1}+(n-1)\binom{2n-k-1}{n-1}=(n+1)\binom{2n-k-1}{n-1}.$$

K určení celkového součtu $2(p_1+p_2+\ldots+p_n)$ potřebujeme vypočítat

$$S_n=\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{2n-2}{n-1}.$$

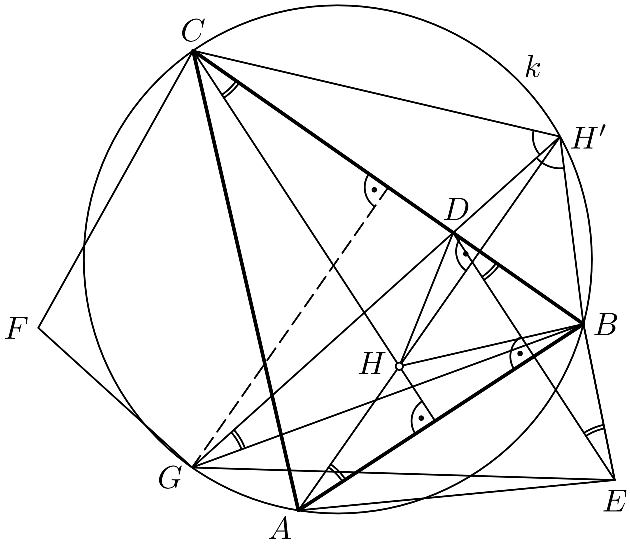
Součet na pravé straně udává počet všech n-prvkových podmnožin množiny $\{1,2,\ldots,2n-1\}$, když je budeme počítat roztříděné do skupin podle jejich největšího prvku, kterým je jedno z čísel $n,n+1,\ldots,2n-1$. Proto platí $S_n=\binom{2n-1}{n}$, takže hledaný součet je $2(n+1)\binom{2n-1}{n}=(n+1)\binom{2n}{n}$.

---

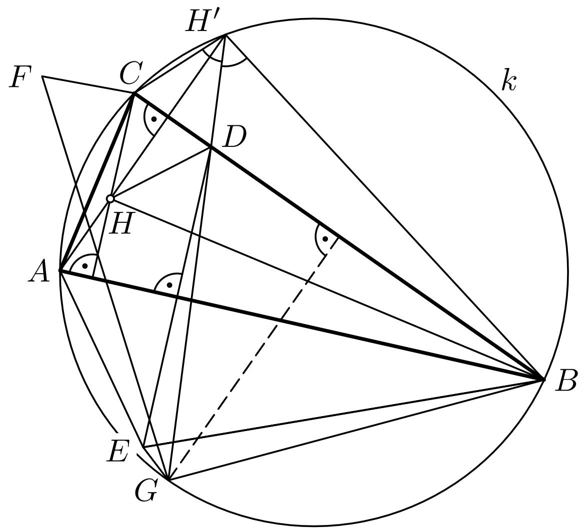
5. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H. Osa úhlu BHC protíná stranu BC v bodě D. Označme postupně E a F obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AEF prochází středem G kružnicového oblouku BAC.* (Patrik Bak)

Řešení. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Polopřímka AH protíná kružnici k v bodě $H'\neq A$, o kterém je známo, že je obrazem bodu H v osové souměrnosti podle strany BC. Proto přímka $H'D$ (jako obraz osy HD úhlu BHC) je osou úhlu $BH'C$ a na základě známé vlastnosti osy úhlu prochází středem G oblouku BAC (obr. 1).

Označme obvyklým způsobem α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Jelikož body B, G, A, H' leží na kružnici k (a body G, A na oblouku BAC kružnice k), platí $|\sphericalangle BGD|=|\sphericalangle BGH'|=|\sphericalangle BAH'|=90^\circ-\beta$. Z definice bodu E pak plyne $|\sphericalangle BED|=|\sphericalangle BDE|=90^\circ-\beta$, a protože body E i G leží v polorovině BCA, leží body B, D, G, E na kružnici. Jejich pořadí závisí na velikostech úhlů EBD a GBD: pokud $|\sphericalangle EBD|>|\sphericalangle GBD|$ neboli $2\beta>90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$ (bod G je středem oblouku BAC), bude



Obr. 1



Obr. 2

jejich pořadí B, D, G, E, jinak B, D, E, G (pro $2\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ neboli $\gamma = 3\beta$ vyjde ovšem $E = G$, v tom případě je však tvrzení úlohy splněno triviálně). Podle toho je pak buď $|\sphericalangle EGD| = 180° - |\sphericalangle EBD| = 180° - 2\beta$ (obr. 1), nebo $|\sphericalangle EGD| = |\sphericalangle EBD| = 2\beta$ (obr. 2).

Analogicky lze ukázat, že i body C, D, G, F leží na kružnici, a to právě v tomto pořadí, pokud $2\gamma > 90° - \frac{1}{2}\alpha$, jinak v pořadí C, D, F, G i (při $F = G$ je tvrzení úlohy jistě splněno). Pro velikost úhlu DGF pak podle toho platí buď $|\sphericalangle DGF| = 180° - 2\gamma$, nebo $|\sphericalangle DGF| = 2\gamma$.

Z podmínek $2\beta > 90° - \frac{1}{2}\alpha$ a $2\gamma > 90° - \frac{1}{2}\alpha$ přitom musí být splněna alespoň jedna, jinak by bylo $2\beta + 2\gamma \leqq 2(90° - \frac{1}{2}\alpha) = \beta + \gamma$.

V každém případě můžeme z obou tětivových čtyřúhelníků se společnou stranou DG vyjádřit velikost úhlu EGF. Přitom velikost úhlu EAF známe, z definice bodů E a F totiž plyne

$$|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EAD| + |\sphericalangle DAF| = 2|\sphericalangle BAD| + 2|\sphericalangle DAC| = 2|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$$

a zároveň vidíme, že přímka EF odděluje body A a D, neboť úhel α je ostrý. Musíme proto rozebrat tři případy.

1. Čtyřúhelníky $BDGE$ a $CDGF$ jsou tětivové, takže platí

$$|\sphericalangle EGF| = |\sphericalangle EGD| + |\sphericalangle DGF| = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 2\alpha = |\sphericalangle EAF|.$$

To znamená, že je konvexní i čtyřúhelník $DFGE$, takže jeho úhlopříčka EF odděluje protější vrcholy D a G. Proto oba body G i A leží v téže polorovině vzhledem k EF. Z věty o obvodových úhlech tak vyplývá, že body E, G, A, F leží na kružnici.

2. Čtyřúhelníky $BDEG$ a $CDGF$ jsou tětivové. V tomto případě $|\sphericalangle EGD| = 2\beta$ a $|\sphericalangle DGF| = 180° - 2\gamma$, a protože $2\beta + 2\gamma > 180°$, je $|\sphericalangle EGD| > |\sphericalangle DGF|$, takže bod G leží v polorovině EFD (obr. 2) a platí

$$|\sphericalangle EGF| = |\sphericalangle EGD| - |\sphericalangle DGF| = 2\beta - (180° - 2\gamma) = 180° - 2\alpha$$

neboli $|\sphericalangle EAF| + |\sphericalangle EGF| = 180°$, což spolu s tím, že body A a G jsou v různých polorovinách vzhledem k přímce EF, implikuje, že body F, A, E, G leží na jedné kružnici.

3. Čtyřúhelníky $BDGE$ a $CDFG$ jsou tětivové. Tento případ je ekvivalentní předchozímu, když zaměníme B s C a E s F.

Poznámky. Pokud budeme pracovat s orientovanými úhly dvou přímek, můžeme se vyhnout rozboru shora uvedených tří případů. Zjištěnou skutečnost, že body B, D, E, G leží na kružnici, lze charakterizovat rovností (orientovaných) úhlů $\widehat{EGD} = \widehat{EBD}$ (samozřejmě počítáme modulo 180°) a podobně pro druhou kružnici $\widehat{DGF} = \widehat{DCF}$. Je tedy $\widehat{EGF} = \widehat{EGD} + \widehat{DGF} = \widehat{EBD} + \widehat{DCF} = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 2\alpha$, což jsme potřebovali dokázat, neboť z definice bodů E a F zřejmě $\widehat{EAF} = \widehat{EAD} + \widehat{DAF} = 2\alpha$.

Ukažme ještě, že klíčový poznatek celého řešení o čtveřicích bodů (B, D, E, G) a (C, D, F, G) lze dokázat i jiným, trigonometrickým postupem.

Označme $|\sphericalangle BGD| = \varphi$, $|\sphericalangle DGC| = \psi$ a P patu výšky AH (obr. 3). Jelikož HD je osa úhlu BHC, platí

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BH|}{|CH|} = \frac{|PH|}{\sin|\sphericalangle PBH|} : \frac{|PH|}{\sin|\sphericalangle PCH|} = \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin(90° - \gamma)}.$$

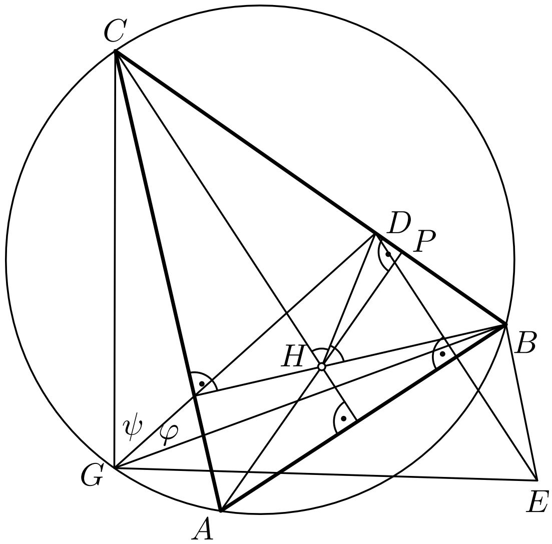
Z rovnosti $|GB| = |GC|$ a z dvojího vyjádření poměru obsahů trojúhelníků BGD a CGD plyne

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Přitom $\varphi + \psi = \alpha = (90° - \gamma) + (90° - \beta)$. Spojením obou rovností tak pro $\varphi \in (0°, \alpha)$ dostáváme rovnici

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin(90° - \gamma)}.$$

Podíl na levé straně je v uvedeném intervalu rostoucí funkcí proměnné φ, takže rovnice má (pro daný trojúhelník) jediné řešení. Zjevně $\varphi = 90° - \beta$ v daném intervalu leží a rovnici vyhovuje. Proto také $\psi = 90° - \gamma$.

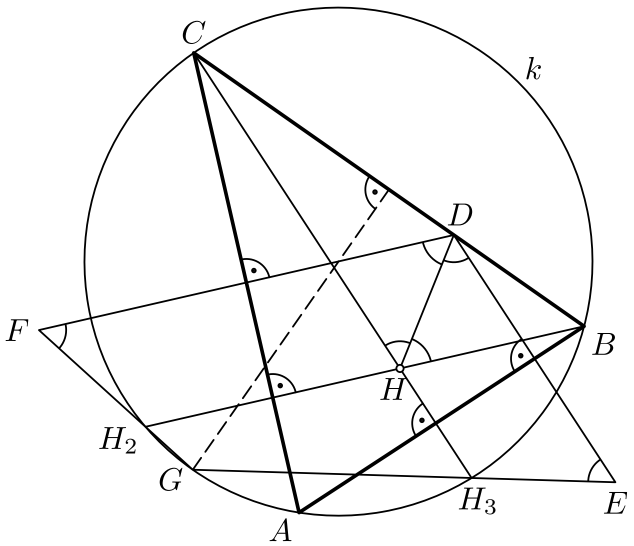


Obr. 3

Trojúhelník DEB je rovnoramenný se základnou DE, proto $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle BDE| = 90° - \beta = |\sphericalangle BGD|$. Body E, G přitom leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce BD, proto leží body B, D, E, G na kružnici. Stejné tvrzení o bodech D, C, F, G plyne z dokázané rovnosti $\psi = 90° - \gamma$.

Jiné řešení. Z definice bodů E a F je zřejmé, že pro (orientovaný) úhel EAF platí $\widehat{EAF} = 2\alpha$. Označme postupně H_2, H_3 body souměrně sdružené s průsečíkem výšek H daného trojúhelníku podle jeho stran AC, resp. AB. Ty, jak známo, leží na kružnici k opsané trojúhelníku ABC (obr. 4).

Protože DH je osa úhlu BHC a $CH \parallel DE$, je $|\sphericalangle H_3ED| = |\sphericalangle HDE| = |\sphericalangle DHC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BHC| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Stejnou velikost má ovšem i orientovaný úhel $\widehat{CH_3G}$ nad obloukem CG, neboť ten je polovinou oblouku CAB, je tedy $\widehat{CH_3G} = \widehat{DEH_3}$. A protože $CH_3 \parallel DE$, znamená to, že body G, H_3 a E leží v přímce. Podobně leží v přímce i body G, H_2 a F, takže $\widehat{EGF} = \widehat{H_3GH_2} = \widehat{H_3AH_2} = \widehat{H_3AH} + \widehat{HAH_2} = 2\alpha = \widehat{EAF}$, což jsme chtěli dokázat.

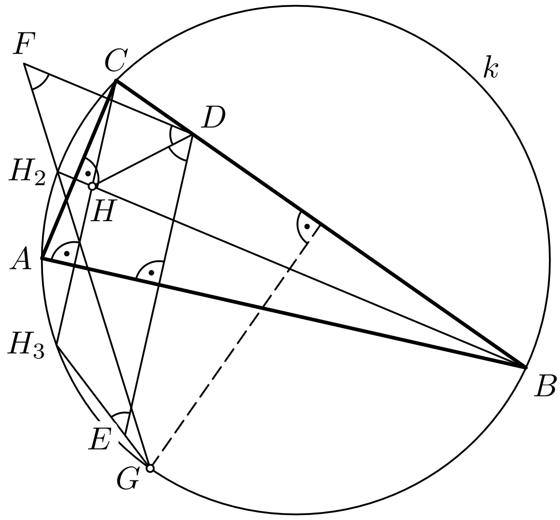


Obr. 4

Poznámka. Obr. 4 svádí k jednoduchému závěru, že úhel EGF snadno dopočteme z vnitřních úhlů čtyřúhelníku $EDFG$:

$$|\sphericalangle EGF| = 360° - |\sphericalangle GED| - |\sphericalangle DFG| - |\sphericalangle EDF| = 360° - 4(90° - \tfrac{1}{2}\alpha) = 2\alpha.$$

Předpoklady úlohy však konvexnost čtyřúhelníku $EDFG$ bohužel nezaručují (obr. 5).



Obr. 5

6. *Je dáno nenulové celé číslo k. Dokažte, že rovnici*

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje lichý počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y), právě když k je dělitelné sedmi. (Patrik Bak)

Řešení. Po vynásobení obou stran dané rovnice výrazem $x + y$ dostaneme rovnici

$$x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y). \tag{1}$$

Každé řešení (x, y) dané rovnice je i řešením rovnice (1), té však mohou navíc vyhovovat i dvojice, pro něž $x + y = 0$, tj. $y = -x$.

Dvojice $(x, -x)$ je řešením (1), právě když platí $x^2 + x^2 + 2x^2 = k \cdot 0$ neboli $x = 0$. Rovnice (1) má proto právě o jedno řešení víc než daná rovnice, a tak stačí dokázat, že rovnice (1) má sudý počet celočíselných řešení, právě když $7 \mid k$.

Rovnici (1) ekvivalentně upravíme do podoby kvadratické rovnice

$$x^2 - x(y + k) + 2y^2 - ky = 0 \tag{2}$$

s neznámou x. Pro její diskriminant platí

$$\begin{aligned} D(y) = (y + k)^2 - 4(2y^2 - ky) = k^2 + 6ky - 7y^2 &= (k - y)(k + 7y) = \\ &= -7(y - \tfrac{3}{7}k)^2 + \tfrac{16}{7}k^2, \end{aligned} \tag{3}$$

což je pro každé k shora omezená kvadratická funkce. Rovnice (2) má tudíž pro každé celé k nezáporný diskriminant $D(y)$ pouze pro konečně mnoho celých čísel y, a může tak mít jen konečný počet celočíselných řešení (x, y).

Pokud je $D(y) > 0$ pro nějaké celé číslo y, má rovnice (2) právě dvě reálná řešení, která mohou být celočíselná jen zároveň, protože jejich součet $y + k$ je celé číslo. Pro každé takové y má tedy (2) vždy sudý počet řešení.

Z vyjádření (3) vidíme, že $D(y) = 0$ pro $y = k$ nebo pro $y = -\frac{1}{7}k$. V prvním případě se rovnice (2) redukuje na rovnici $(x - k)^2 = 0$ s dvojnásobným kořenem $x = k$, rovnice (1) má tudíž jediné řešení (k, k) se složkou $y = k$. V druhém případě je y celočíselné, právě když je číslo k dělitelné sedmi, a pak má rovnice (2) dvojnásobný kořen $x = \frac{3}{7}k$, tudíž $(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$ je jediné řešení rovnice (1) se složkou $y = -\frac{1}{7}k$. Navíc obě řešení (k, k) i $(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$ jsou různá, protože $k \neq 0$.

Vidíme tedy, že rovnice (1) má sudý počet celočíselných řešení, právě když je číslo k dělitelné sedmi. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Stejně jako v původním řešení zkoumáme, kdy má rovnice (1) sudý počet celočíselných řešení.

Rovnici (1) upravíme na tvar

$$7(2x - y - k)^2 + (7y - 3k)^2 = 16k^2. \tag{4}$$

Protože pro dané k zřejmě existuje jen konečný počet celých čísel a, b takových, že

$$7a^2 + b^2 = 16k^2, \tag{5}$$

má rovnice (4) jen konečný počet celočíselných řešení, která získáme řešením soustav

$$2x - y - k = a, \tag{6}$$
$$7y - 3k = b, \tag{7}$$

odpovídajících všem celočíselným řešením (a, b) rovnice (5). Z jejího tvaru plyne, že složky a, b mají vždy stejnou paritu. Díky tomu vidíme, že pokud má rovnice (7) celočíselné řešení y, které tak má stejnou paritu nejen jako číslo $k + b$, ale i jako číslo $k + a$, je číslo $y + k + a$ sudé, a tudíž i rovnice (6) má pro dotyčná k a b celočíselné řešení x.

Z poslední úvahy plyne, že dvě soustavy (6) a (7), které odpovídají „sdruženým“ řešením (a, b) a $(-a, b)$ (kde $a \neq 0$) rovnice (5), mají buďto po jednom řešení (se stejným y a různými x), nebo žádné řešení nemají. Jediná takto nesdružená celočíselná řešení rovnice (5) jsou zřejmě $(0, 4k)$ a $(0, -4k)$ (připomeňme, že $k \neq 0$ podle zadání), takže parita počtu celočíselných řešení rovnice (4) je shodná s paritou celkového počtu celočíselných řešení dvou odpovídajících soustav (6) a (7); pro $(a, b) = (0, 4k)$ to je $(x, y) = (k, k)$, pro $(a, b) = (0, -4k)$ vyhovuje $(x, y) = (\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$. Proto je zkoumaná parita sudá, právě když 7 dělí k. K hotovému důkazu dodejme, že jsme při našich úvahách mlčky využívali zřejmý poznatek, že různým dvojicím (a, b) odpovídají různá řešení (x, y) soustav (6) a (7).

Poznámka. Rovnice (1), jak je ostatně vidět i z jejího upraveného tvaru (4), je při nenulovém k rovnicí elipsy se středem $(\frac{5}{7}k, \frac{3}{7}k)$, a pokud je $k = 7m$ pro m celé, je s každým bodem (x, y) bodem elipsy také bod $(10m - x, 6m - y)$, takže mřížové body tu vystupují ve dvojicích, je jich tedy sudý počet.