67. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte nejmenší přirozené číslo končící čtyřčíslím 2018, které je násobkem čísla 2017.

2. Pro celá čísla x, y, z platí $x^2 + y - z = 10$, $x^2 - y + z = 22$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$.

3. Je dán trojúhelník ABC. Nechť P, Q jsou po řadě středy stran AB, AC a nechť R, S jsou vnitřní body úsečky BC, pro něž $|BR| = |RS| = |SC|$. Označme T průsečík přímek PR a QS. Dokažte, že $ABTC$ je rovnoběžník.

4. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které platí: Vyplníme-li čtvercovou tabulku $n \times n$ libovolnými navzájem různými přirozenými čísly, vždy se najde pole s číslem, které při dělení třemi dává stejný zbytek jako jiné číslo z téhož řádku i jako jiné číslo z téhož sloupce.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 10. dubna 2018

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice součtu získaných bodů (vyšší než 7 bodů) k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Využijeme toho, že každý násobek sedmi jednomístným číslem končí jinou číslicí. Postupně budeme odzadu doplňovat číslice hledaného činitele (k danému činiteli 2 017) tak, abychom ve výsledku dostali číslo končící čtyřčíslím 2 018.

V prvním kroku hledáme číslici, jejíž násobek sedmi končí číslicí 8:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & * & * & * & ? \\
\hline
\cdots & * & * & * & * \\
\cdots & * & * & * & \\
\cdots & * & * & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
$$

Číslicí 8 končí jediný z násobků sedmi číslicemi 0 až 9, a to číslo $28 = 4 \cdot 7$. Na místě otazníku proto musí být číslice 4. Doplníme ji a v prvním řádku pod čarou tak bude $4 \cdot 2\,017 = 8\,068$, což skutečně končí číslicí 8. Ve výsledném součinu potřebujeme mít číslici 1 na místě desítek; tu spolu s číslicí 6 na místě desítek v čísle 8 068 dostaneme pouze tak, že k ní přičteme číslici 5 — tentokrát tedy hledáme takový násobek čísla 2 017, který končí číslicí 5:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & * & * & ? & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & * & * & 5 & \\
\cdots & * & * & & \\
\cdots & * & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
$$

Tomu vyhovuje pouze násobek $5 \cdot 7 = 35$. Podobným postupem doplníme i zbylé dvě číslice — na místě stovek proto bude číslice 3 a na místě tisíců číslice 4:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & * & ? & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & * & 1 & & \\
\cdots & * & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & ? & 3 & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & 5 & 1 & & \\
\cdots & 8 & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & 2 & 0 & 1 & 7 \\
\times & 4 & 3 & 5 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 8 \\
\cdots & 0 & 8 & 5 & \\
\cdots & 5 & 1 & & \\
\cdots & 8 & & & \\
\hline
\cdots & 2 & 0 & 1 & 8
\end{array}
$$

Každé číslo, které po vynásobení číslem 2 017 končí čtyřčíslím 2 018, musí tedy končit čtyřčíslím 4 354, a tak nejmenší vyhovující násobek je $2\,017 \cdot 4\,354 = 8\,782\,018$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správnou volbu postupu zjišťování číslic zprava udělte 1 bod. Každou číslici správného řešení odměňte 1 bodem a zdůvodnění, že nalezené číslo je nejmenší, odměňte posledním bodem. Pokud je postup správný, ale nalezené číslo není správné, udělte nejvýše 4 body.

2. Sečtením daných rovností dostaneme

$$(x^2 + y - z) + (x^2 - y + z) = 2x^2 = 10 + 22 = 32,$$

proto $x^2 = 16$ neboli $x = \pm 4$. Pokud tento výsledek dosadíme zpět do první či druhé z daných rovností, vyjde v obou případech $z = y + 6$.

Dosaďme teď obě získané rovnosti do výrazu, který máme minimalizovat:

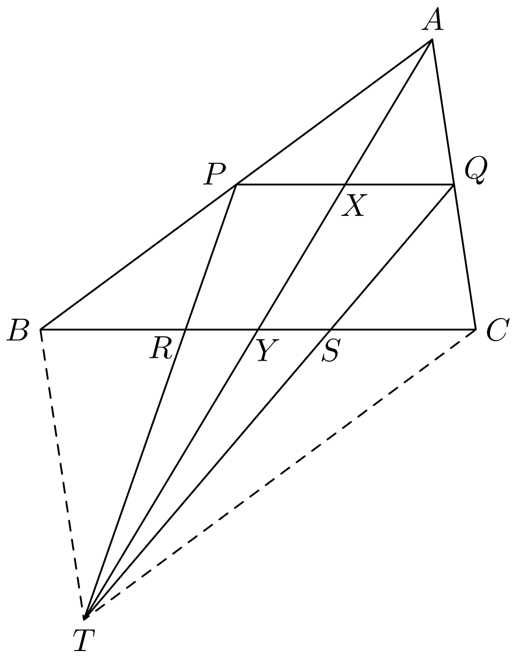
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 + y^2 + (y+6)^2 = 2y^2 + 12y + 52 = 2(y^2 + 6y + 26) = 2\bigl((y+3)^2 + 17\bigr).$$

Protože $(y+3)^2 \geqq 0$, je nejmenší možná hodnota daného výrazu rovna $2 \cdot 17 = 34$. Této hodnoty upravený výraz dosahuje pro $y = -3$, z čehož vychází $z = y + 6 = 3$, nalezená čísla x, y a z jsou tudíž celá, jak vyžaduje zadání.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození obou vztahů $x^2 = 16$ a $z = y + 6$ udělte po 1 bodu, 1 bod za přepis výrazu v zadání na výraz s jednou neznámou, 2 body za jeho úpravu na výraz s druhou mocninou a 1 bod za nalezení minima 34. Chybí-li ovšem konstatování, že hodnoty 34 výraz vskutku nabývá, strhněte 1 bod.

3. Dokážeme, že úhlopříčky čtyřúhelníku $ABTC$ se navzájem půlí, což bude znamenat, že $ABTC$ je vskutku rovnoběžník.

Označme X střed úsečky PQ a Y střed úsečky RS (obr. 1). Z rovnosti $|BR| = |SC|$ plyne, že bod Y je zároveň středem úsečky BC. Protože jak známo $PQ \parallel BC$, jsou trojúhelníky APQ a ABC podobné podle věty *uu*, takže jejich „poloviny“ APX



Obr. 1

a ABY jsou podobné podle věty *sus*, tudíž bod X leží uvnitř úsečky AY. Podobně z rovnoběžnosti $PQ \parallel RS$ plyne podobnost trojúhelníků $TRS \sim TPQ$ (*uu*), tudíž jsou podobné i trojúhelníky $TRY \sim TPX$ (*sus*), a bod Y tak leží uvnitř úsečky TX (neboť $|RS| < |PQ|$). Dohromady dostáváme, že bod Y leží na úsečce AT. Zbývá dokázat, že Y je nejen středem úsečky BC, ale i středem úsečky AT.

Protože úsečka PQ je střední příčkou trojúhelníku ABC, je $|PQ| = \frac{1}{2}|BC|$ neboli $|PX| = \frac{1}{2}|BY|$, takže z první podobnosti $APX \sim ABY$ máme

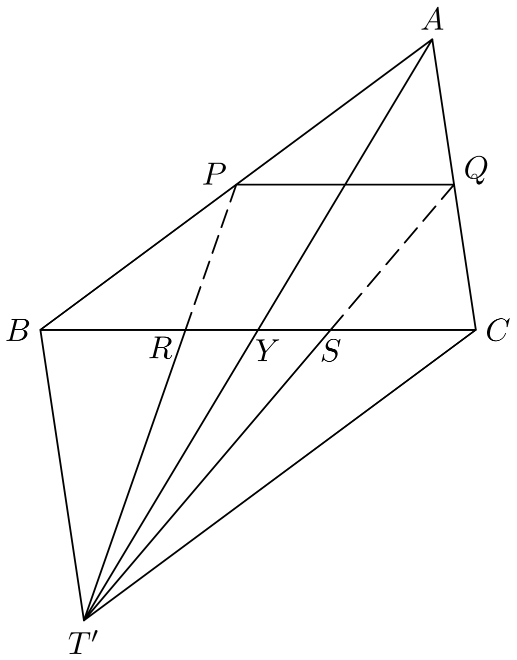
$$|AX| = \frac{1}{2}|AY| \quad \text{neboli} \quad |AY| = 2|XY|. \tag{1}$$

Protože $|RS| = \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3} \cdot 2|PQ|$, je $|RY| = \frac{2}{3}|PX|$, a proto z druhé podobnosti $TRY \sim TPX$ vychází

$$|TY| = \frac{2}{3}|TX| = \frac{2}{3}(|TY| + |XY|) \quad \text{neboli} \quad |TY| = 2|XY|.$$

To spolu s druhou rovností v (1) dává $|TY| = |AY|$. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABT'C$. Jeho úhlopříčka AT' pak prochází středem Y úsečky BC (obr. 2), a ze zadání tudíž plyne, že



Obr. 2

$|RY| = \frac{1}{2}|RS| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{3}|BY|$ neboli $|BR| : |RY| = 2 : 1$. Bod R tak leží na těžnici BY trojúhelníku ABT' a dělí ji v poměru $2 : 1$, proto je jeho těžištěm. Přímka $T'R$ je tudíž těžnicí trojúhelníku ABT', a prochází tedy středem P strany AB. Podobně dostaneme, že přímka $T'S$ prochází bodem Q, a tak je bod T' průsečíkem přímek PR a QS, takže $T' = T$, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz, že úsečka AT půlí úsečku BC, dejte celkem 3 body, z čehož po jednom bodu za obě podobnosti a třetí bod za důkaz kolinearity bodů A, Y a T. Další 2 body dejte za vyjádření poměru $|TY| : |TX| = 2 : 3$ a za odvození rovnosti $|TY| = |AY|$. A poslední bod za tvrzení, že čtyřúhelník $ABTC$ je rovnoběžník, protože se jeho úhlopříčky půlí.

Pokud řešitel postupuje jako v druhém řešení, oceňte 2 body doplnění na rovnoběžník $ABT'C$. Tři body udělte za tvrzení, že bod R (resp. S) je těžištěm trojúhelníku ABT' (resp. ACT'), přičemž 2 body dejte za odvození poměru $|BR| : |RY| = 2 : 1$ (resp. $|SC| : |SY| = 2 : 1$). Poslední bod udělte za zjištění, že bod T' leží stejně jako bod T v průsečíku přímek PR a QS.

Pokud řešitel postupuje jinak než v uvedených řešeních, hodnoťte jednotlivá zjištění v souladu s uvedenými schématy.

4. Pro čísla $n = 1, 2, 3$ není těžké uvést příklad tabulek, v nichž kýžené pole neexistuje. Protože nás zajímají jen zbytky čísel při dělení třemi, sestavíme nejprve příslušné tabulky tak, abychom v každém řádku i sloupci měli různé zbytky, a pak uvedené zbytky nahradíme různými čísly s týmž zbytkem (tabulka pro $n = 1$ může ovšem obsahovat libovolné přirozené číslo):

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&2\\\hline 2&0&1\\\hline 1&2&0\\\hline\end{array}\qquad\longrightarrow\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 4&5\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 5&6&4\\\hline 7&8&9\\\hline\end{array}$$

Nyní ukážeme, že pro $n = 4$ už dané tvrzení platí. Čísla v libovolně zaplněné tabulce 4×4 nahradíme jejich zbytky 0, 1, 2 při dělení třemi. Zvolme libovolný řádek r_1 zaplněné tabulky. Jsou v něm zapsány čtyři zbytky, takže aspoň jeden z nich — označme ho z_1 — se v řádku opakuje, je tedy zapsán ve dvou různých sloupcích, které označíme s_1 a s_2. Pokud je v sloupci s_1 zbytek z_1 zapsán dvakrát, jsme s hledáním požadovaného pole hotovi (číslo v řádku r_1 a sloupci s_1 má ve svém řádku i sloupci ještě další číslo se stejným zbytkem z_1 při dělení třemi).

V opačném případě je v sloupci s_1 nějaký jiný zbytek — označme ho $z_2 \neq z_1$ — zapsán alespoň dvakrát; příslušné řádky označme r_2 a r_3:

	s_1	s_2
r_1	z_1	z_1
r_2	z_2	?
r_3	z_2	?

Je-li na některém ze dvou polí uvažované tabulky označených zatím otazníkem zbytek z_1, jsme hotovi, protože požadovanou vlastnost má pole v řádku r_1 a ve sloupci s_2. Podobně jsme hotovi, je-li na místě jednoho z otazníků zbytek z_2, protože v tom případě vyhovuje pole se zbytkem z_2 v témž řádku a sloupci s_1. Zbývá ještě ta možnost, že na místech obou otazníků jsou zapsány dva stejné zbytky z_3 ($z_2 \neq z_3 \neq z_1$). Označme zbývající sloupce jako s_3 a s_4 (na jejich skutečném pořadí v tabulce samozřejmě nezáleží):

	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	z_1	z_1		
r_2	z_2	z_3	?	?
r_3	z_2	z_3	?	?

Je-li nyní na místě jednoho ze čtyř otazníků zbytek z_2, má požadovanou vlastnost pole v témž řádku a ve sloupci s_1. Podobně je-li na místě jednoho ze čtyř otazníků zbytek z_3, vyhovuje pole v témž řádku a ve sloupci s_2. Konečně pokud na místě všech čtyř otazníků jsou napsány jen zbytky z_1, pak ovšem každé z těchto čtyř polí má požadovanou vlastnost.

Právě jsme ukázali, že v každé tabulce 4×4 najdeme vždy číslo, které dává stejný zbytek při dělení třemi jako jiné číslo z téhož řádku i jako jiné číslo z téhož sloupce. Hledané nejmenší n je tudíž rovno čtyřem.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Body rozdělte zhruba následovně: 1 bod za tabulku 3×3, 1 bod za ideu, že v každém řádku a sloupci tabulky 4×4 se nějaký zbytek opakuje, 1 bod za propojení řádků a sloupců (smysluplné použití myšlenky), 1 bod za doplnění následné doplnění zbytků z_3 (dvojice otazníků), 1 bod za doplnění dalších zbytků (čtveřice otazníků), které vedou k nalezení vhodného pole, a 1 bod za správný závěr, že nejmenší hledané číslo je 4.