69. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Předpokládejme, že navzájem různá reálná čísla a, b, c, d splňují nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

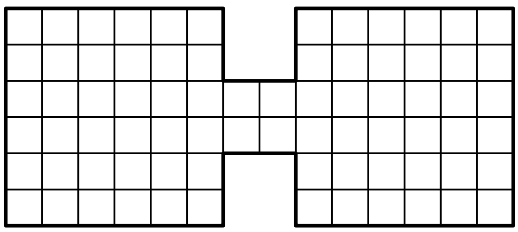
Pokud a je z těchto čtyř čísel největší, které z nich je nejmenší?

2. Pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ platí

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle B'A'C'| = 180°.$$

Ukažte, že velikost úhlu sevřeného stranou BC a těžnicí z vrcholu A je stejná jako velikost úhlu sevřeného stranou $B'C'$ a těžnicí z vrcholu A'.

3. Ukažte, že počet způsobů, jimiž lze vydláždit útvar dominovými kostkami, lze vy-



jádřit jako součet dvou druhých mocnin přirozených čísel.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 10. prosince 2019

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Předpokládejme, že navzájem různá reálná čísla a, b, c, d splňují nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Pokud a je z těchto čtyř čísel největší, které z nich je nejmenší? (*Josef Tkadlec*)

Řešení. Nerovnost mezi prvními dvěma výrazy upravíme odečtením pravé strany a následným postupným vytýkáním:

$$\begin{aligned} ab + cd - bc - ad &> 0, \\ a(b-d) - c(b-d) &> 0, \\ (a-c)(b-d) &> 0. \end{aligned}$$

Jelikož platí $a > c$, musí být i druhá závorka kladná, a platí tak $b > d$.

Obdobnou úpravu provedeme pro nerovnost $bc + ad > ac + bd$, čímž získáme

$$\begin{aligned} bc + ad - ac - bd &> 0, \\ b(c-d) - a(c-d) &> 0, \\ (b-a)(c-d) &> 0. \end{aligned}$$

První závorka je díky $a > b$ záporná, a proto musí být záporná i ta druhá. Odtud usoudíme, že $d > c$.

Odvodili jsme tak řetězec nerovností $a > b > d > c$, z něhož vidíme, že nejmenším ze čtveřice čísel a, b, c, d může být jedině c.

Poznámka 1. Protože provedené úpravy byly ekvivalentní, můžeme konstatovat, že obě nerovnosti ze zadání úlohy jsou splněny, kdykoli pro reálná čísla a, b, c, d platí $a > b > d > c$.

Poznámka 2. Porovnáním prvního výrazu s posledním lze analogickým způsobem dokázat nerovnost $b > c$. Je-li tato rovnost dokázána společně s $d > c$, stačí to k úplnému řešení. Dokážeme-li ovšem pouze $b > c$ a $b > d$, je stále možné, že $c > d$.

- ▷ Za úplné řešení udělte 6 bodů, z nichž tři náleží důkazu každé z nerovností $b > d$ a $d > c$ (popřípadě $b > c$ a $d > c$). Je-li dokázána dvojice nerovností $b > c$ a $b > d$, udělte 4 body.
- ▷ Za nalezení jednoho ze součinových tvarů $(a-c)(b-d) > 0$, $(b-a)(c-d) > 0$, $(a-d)(b-c) > 0$ udělte dva body. V případě nalezení více součinových tvarů udělte čtyři body, pokud příslušné nerovnosti vedou k úplnému řešení (viz poznámku na konci řešení), a tři body pokud nikoli.
- ▷ Existence vyhovující čtveřice čísel je zaručena již v zadání, a není tak třeba uvádět příklad. Ze stejného důvodu není nutné při jakýchkoli úpravách postupovat ekvivalentně a ani případnou ekvivalenci zmiňovat.

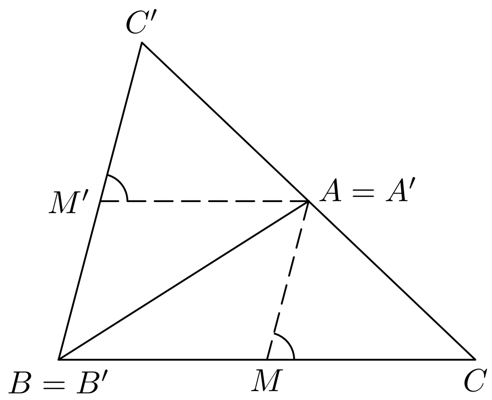
2. Pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ platí

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle B'A'C'| = 180^\circ.$$

Ukažte, že velikost úhlu sevřeného stranou BC a těžnicí z vrcholu A je stejná jako velikost úhlu sevřeného stranou $B'C'$ a těžnicí z vrcholu A'. (*Patrik Bak*)

Řešení. Ve všech řešeních budeme značit M, M' odpovídající středy stran BC, $B'C'$. Pak stačí dokázat rovnost $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle A'M'C'|$.

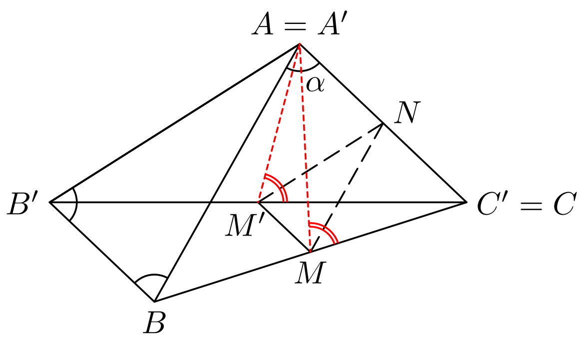
První řešení. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ umístíme do roviny tak, aby bylo $A' = A$, $B' = B$ a C' byl obraz bodu C ve středové souměrnosti podle bodu A, což lze právě díky předpokládané rovnosti $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle B'A'C'| = 180^\circ$. Úsečky AM', AM jsou potom střední příčky trojúhelníku BCC' (obr. 1), takže čtyřúhelník $BMAM'$ je rovnoběžník. Ze shodnosti jeho vnitřních úhlů u protějších vrcholů M a M' už plyne shodnost vyznačených úhlů AMC a $A'M'C'$, kterou jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

Druhé řešení. Budeme navíc předpokládat, že $|\sphericalangle BAC| \neq |\sphericalangle B'A'C'|$, neboť jinak by tvrzení úlohy plynulo přímo ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. S ohledem na symetrii pak stačí uvažovat pouze ten případ, kdy úhel BAC je ostrý.

Umístěme oba trojúhelníky tak, aby bylo $A' = A$, $C' = C$ a B' byl takový bod poloroviny ACB, že $|\sphericalangle B'AC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$, přičemž $|AB'| = |AB|$ (obr. 2).



Obr. 2

Nyní stačí dokázat, že čtyřúhelník $AM'MC$ je tětivový, neboť pak platí kýžené $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle AM'C| = |\sphericalangle A'M'C'|$ podle věty o obvodovém úhlu.

Pokud označíme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, má úhel $B'AB$ velikost $|\sphericalangle B'AC| - \alpha = 180° - 2\alpha$. Z rovnoramennosti trojúhelníku ABB' pak plyne, že $|\sphericalangle ABB'| = \alpha$ neboli $BB' \parallel AC$. Jelikož MM' je střední příčkou trojúhelníka CBB', platí také $MM' \parallel BB'$, a tedy i $MM' \parallel AC$. Pro střed N strany AC navíc platí $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|AB'| = |M'N|$, takže osa úsečky MM' prochází bodem N. To už ale znamená, že lichoběžník $AM'MC$ je rovnoramenný, a tedy i tětivový, což jsme chtěli dokázat.

Třetí řešení. Dokážeme shodnost trojúhelníků MAC, $M'C'A'$ podle věty *sss* výpočtem. Ze shodnosti pak vyplyne i požadovaná rovnost úhlů. Při standardním označení stran obou daných trojúhelníků podle kosinové věty pro trojúhelník $A'B'C'$ platí

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Pro délku těžnice t_a přitom platí známý vztah $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Dosazením za a^2 z kosinové věty pro trojúhelník ABC získáme

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}{4} = \frac{a'^2}{4},$$

a tedy $a'/2 = t_a$ neboli $|M'C'| = |MA|$. Rovnost $|M'A'| = |MC|$ dokážeme analogicky, a jelikož podle zadání platí i $|AC| = |C'A'|$, jsou trojúhelníky MAC, $M'C'A'$ skutečně shodné.

Čtvrté řešení. Jiný výpočet založíme na vyjádření $\cos|\sphericalangle AMC|$ pomocí b, c a $\cos\alpha$. Jako v předchozím řešení použijeme známý vztah $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ a též kosinovou větu $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Z kosinové věty pro trojúhelník AMC a uvedených vztahů postupně dostáváme:

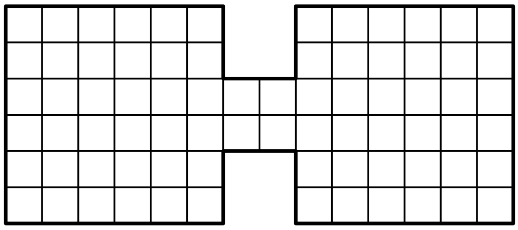
$$\begin{aligned}\cos|\sphericalangle AMC| &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + t_a^2 - b^2}{at_a} = \frac{a^2 + 4t_a^2 - 4b^2}{4at_a} = \frac{2c^2 - 2b^2}{4at_a} = \frac{c^2 - b^2}{2at_a} = \\ &= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)(2b^2 + 2c^2 - a^2)}} = \\ &= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)(b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha)}} = \\ &= \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2\cos^2\alpha}}.\end{aligned}$$

Použitím tohoto vzorce pro trojúhelník $A'B'C'$ s prvky $b' = b$, $c' = c$ a $\alpha' = 180° - \alpha$ dostáváme díky $\cos^2\alpha = \cos^2(180° - \alpha)$ rovnost $\cos|\sphericalangle AMC| = \cos|\sphericalangle A'M'C'|$, a tedy $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle A'M'C'|$, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě neúplných řešení postupujte následovně:

- ▷ Za libovolnou konstrukci, v níž řešitel využije rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle B'A'C'| = 180°$ k netriviálnímu zjištění (např. tři body leží v přímce, čtyři body leží na kružnici), udělte 2 body. Za konstrukci, díky níž řešitel netriviálně přeformuluje dokazované tvrzení (například — jako ve druhém řešení — na to, že body A, M', M, C leží na téže kružnici), udělte také 2 body. Proto je-li splněno obojí, udělte body čtyři.
- ▷ Za správný výpočet vedoucí k $|AM| = |B'C'|/2$ udělte tři body. Stejně tak za vyjádření $\cos|\sphericalangle AMC|$ pouze pomocí b, c a α. Vztah pro délku těžnice stačí uvést jako (známý) fakt. Za samotné jeho uvedení ovšem body neudělujte.
- ▷ Body udělené za geometrickou konstrukci nelze sčítat s body udělenými za výpočty.
- ▷ Pokud řešitel úlohu vyřeší pomocí konstrukce, která předpokládá $|\sphericalangle BAC| < 90°$ nebo podobné tvrzení, které lze bez újmy na obecnosti předpokládat ze symetrie, body nestrhávejte. Plný počet bodů udělte i při opomenutí případu $|\sphericalangle BAC| = 90°$.

3. Ukažte, že počet způsobů, jimiž lze vydláždit útvar dominovými kostkami, lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin přirozených čísel. (*Josef Tkadlec*)



Řešení. Pokud by některá z obou červených úseček na obrázku protínala právě jednu dominovou kostku, zbylo by nám v čtverci 6×6, který tato úsečka z daného útvaru vyčleňuje, vydláždit 35 políček. To je ale samozřejmě nemožné, protože 35 je liché číslo.

Platí tedy, že kterákoli z obou červených úseček buď neprotíná žádnou dominovou kostku (případ A jako u levé úsečky na obr. 3), anebo protíná právě dvě dominové kostky (případ B jako u pravé úsečky na obr. 3).

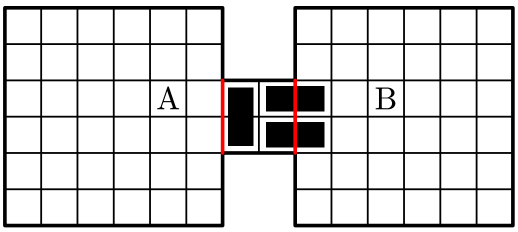
Pokud u některé červené úsečky nastane případ A, zbude v příslušném čtverci 6×6 k vydláždění všech 36 políček. Označme a počet způsobů, jimiž to lze provést. Podobně nastane-li případ B, zbývá v příslušném čtverci vydláždit oblast čítající 34 políček. Příslušný počet způsobů označme b. (Zřejmě platí $a > b$.) Nyní rozlišíme tři případy.

(a) Dláždění, v nichž nastane u obou červených úseček případ B, je přesně b^2.

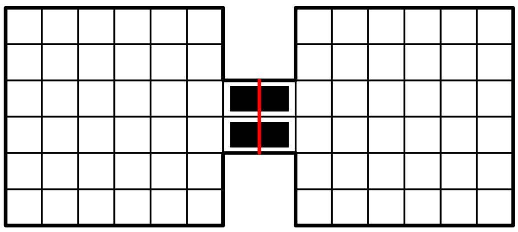
(b) Nastane-li jednou případ A a jednou případ B, je dláždění oblasti mezi úsečkami určeno jednoznačně podle toho, zda případ A nastal vlevo nebo vpravo. Dláždění tohoto typu je tedy $2ab$.

(c) V posledním případě „A-A" je možné zbylý čtverec 2×2 mezi červenými úsečkami vydláždit dvěma způsoby, a výsledných dláždění je tedy $2a^2$.

Celkový počet dláždění je $b^2 + 2ab + 2a^2$, což lze upravit do kýženého součtu dvou čtverců jako $(a + b)^2 + a^2$. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 3


Obr. 4

Jiné řešení. Pokud by červená úsečka na obr. 4 protínala právě jednu dominovou kostku, zbyl by na každé její straně k vydláždění útvar o 37 políčkách, což není možné. Červená úsečka tedy buď protíná dvě dominové kostky (případ A), nebo neprotíná žádnou (případ B). Označme a počet způsobů, jimiž lze vydláždit čtverec 6×6, a b počet způsobů, jimiž lze vydláždit útvar o 38 políčkách vzniklý v případě B. Pak podobně jako v prvním řešení získáme, že celkový počet možností je $a^2 + b^2$, a jsme hotovi.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Ty rozdělte mezi jednotlivé části úlohy následovně:

▷ [2 body] Důkaz, že hledaná dláždění jsou čtyř druhů A-A, B-B, A-B, B-A nebo ekvivalentního tvrzení.

- ▷ [1 bod] Označení počtů dílčích dláždění a, b (nebo jiných dvou počtů, kupříkladu $a - b$ a b).
- ▷ [2 body] Určení počtu dláždění jako $b^2 + 2ab + 2a^2$ (nebo ekvivalentní výraz v případě jiného značení).
- ▷ [1 bod] Úprava výrazu na součet čtverců.

Za snahy o přímý výpočet počtu dláždění udělte body pouze v případě správného výsledku i správné argumentace. Vzhledem k tomu, že již hodnoty $a = 6\,728$ a $b = 2\,900$ nelze snadno nalézt bez pomoci počítače, taková řešení neočekáváme. Pokud se to přece jen podaří, udělte 2 body za správný výpočet každé z hodnot a, b.