69. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí

$$n + s(n) = 2\,019,$$

kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n.

2. Tabulka 3×3 je vyplněna navzájem různými přirozenými čísly tak, že v každém řádku i sloupci je součet krajních čísel roven číslu napsanému mezi nimi. Zjistěte, jaké nejmenší číslo může být napsáno uprostřed tabulky.

3. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž kružnice vepsaná má poloměr 2.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 28. ledna 2020

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí

$$n + s(n) = 2\,019,$$

kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n. (*Jaroslav Švrček*)

Řešení. Pokusme se nejprve vydedukovat nějaký odhad hodnoty čísla n, které by mohlo splňovat zadanou rovnici. Na její levé straně máme součet dvou přirozených čísel n a $s(n)$, a proto obě musí být menší než $2\,019$. Přesněji, hodnota hledaného čísla $n = 2\,019 - s(n)$ bude nejvýše $2\,018$, jelikož $s(n)$ je přirozené číslo. Pak víme, že ciferný součet čísla $n \leqq 2\,018$ je nejvýše $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, a proto samotné číslo n musí být někde mezi $2\,018$ a $2\,019 - 28 = 1\,991$.

Nyní stačí vyzkoušet, pro které z hodnot $n \in \{2\,018, 2\,017, \ldots, 1\,991\}$ vyjde rovnost $n + s(n) = 2\,019$:

n	$s(n)$	$n+s(n)$
2 018	11	2 029
2 017	10	2 027
2 016	9	2 025
2 015	8	2 023
2 014	7	2 021
2 013	**6**	**2 019**
2 012	5	2 017
2 011	4	2 015
2 010	3	2 013

n	$s(n)$	$n+s(n)$
2 009	11	2 020
2 008	10	2 018
2 007	9	2 016
2 006	8	2 014
2 005	7	2 012
2 004	6	2 010
2 003	5	2 008
2 002	4	2 006
2 001	3	2 004
2 000	2	2 002

n	$s(n)$	$n+s(n)$
1 999	28	2 027
1 998	27	2 025
1 997	26	2 023
1 996	25	2 021
1 995	**24**	**2 019**
1 994	23	2 017
1 993	22	2 015
1 992	21	2 013
1 991	20	2 011

Rozebírání všech 28 možností od $1\,991$ do $2\,018$ (případně v jiném podobném intervalu) je možné různými způsoby zkrátit.

Prvním je například pozorování, že pokud zmenšíme číslo n o jednotku a nepřejdeme přitom přes desítku, zmenší se hodnota součtu $n + s(n)$ o 2 (například pro $n = 2\,005$ je $n + s(n) = 2\,012$, pro $n = 2\,004$ vyjde $2\,010$ apod.). Proto má zkoumaný součet předepsanou hodnotu $2\,019$ pro nejvýše jedno n v každé desítce přirozených čísel, jež se liší pouze na místě jednotek, a my je dokonce můžeme určit z hodnoty součtu pro jediné číslo této desítky, kupř. pro to, které končí číslicí 9. Podle přechozích odhadů tak budeme potřebovat hodnoty $n + s(n)$ pouze pro n rovná $2\,019$, $2\,009$ a $1\,999$.

Pro $n = 2\,019$ dostáváme $n + s(n) = 2\,031 = 2\,019 + 2 \cdot 6$, a proto mezi čísly od $2\,010$ do $2\,019$ vyhovuje pouze číslo $2\,019 - 6 = 2\,013$, které je skutečně jedním z řešení dané úlohy (zkouška díky vypozorovanému klesání součtu o hodnotu 2 není nutná).

Pro $n = 2\,009$ dostáváme $n + s(n) = 2\,020$, které je na rozdíl od $2\,019$ sudé, a tak mezi čísly od $2\,000$ po $2\,009$ bychom řešení hledali marně.

Konečně pro $n = 1\,999$ dostáváme $n+s(n) = 2\,027 = 2\,019+2\cdot 4$, a proto vyhovuje pouze číslo $1\,999 - 4 = 1\,995$, které je druhým řešením.

Jiný způsob, jak lze eliminovat počet rozebíraných možností, je uvědomit si, že číslo n dává při dělení třemi stejný zbytek jako jeho ciferný součet $s(n)$. Pokud tento zbytek označíme jako d, bude číslo $n + s(n) = 2\,019$ při dělení třemi dávat zbytek $d + d = 2d$. Ciferný součet čísla $2\,019$ je 12, proto i číslo $2\,019$ je dělitelné třemi, a proto zbytek čísla $2d$ při dělení třemi je nula, a tedy $d = 0$. Jinak řečeno, hledané číslo n je dělitelné třemi. V tomto případě bychom potřebovali prověřit pouze 9 čísel mezi 1 991 a 2 018, která jsou dělitelné třemi, tj. 9 možností $n \in \{2\,016, 2\,013, \ldots, 1\,992\}$.

Předchozí způsob eliminace možností (využitím zbytku při dělení třemi) můžeme ještě vylepšit, pokud si uvědomíme, že podobně lze použít i dělitelnost devíti. Platí, že číslo n a jeho ciferný součet $s(n)$ dávají stejný zbytek při dělení devíti. Označme tento zbytek r. Číslo 2 019 dává při dělení devíti zbytek 3 (tj. zbytek při dělení čísla $2+0+1+$ $+9 = 12$ při dělení devíti). Z rovnice $2\,019 = n + s(n)$ pak podobně jako v předchozím odstavci vyplývá, že n dává při dělení devíti zbytek 6, protože jeho dvojnásobek má dávat zbytek 3. Čísla od 1 991 do 2 018, která dávají zbytek 3 při dělení devíti, jsou pouze tři, a to $n \in \{2\,013, 2\,004, 1\,995\}$.

Odpověď. Úloha má dvě řešení, a to $n = 2\,013$ a $n = 1\,995$.

Jiné řešení. Pokud by hledané číslo n bylo nejvýše trojmístné, byl by součet $n + s(n)$ nejvýše $999 + (9 + 9 + 9) < 2\,019$. Z druhé strany číslo n nemůže být pěti- a vícemístné, protože pak by bylo $n + s(n) > 10\,000$. Označme číslice hledaného čtyřmístného čísla n jako a, b, c, d, tj. $n = 1\,000a + 100b + 10c + d$, přičemž $a \neq 0$. Danou rovnici pak můžeme upravit následovně:

$$(1\,000a + 100b + 10c + d) + (a + b + c + d) = 2\,019,$$
$$1\,001a + 101b + 11c + 2d = 2\,019. \tag{1}$$

Jelikož $0 \leqq a, b, c, d \leqq 9$, je zřejmě $a \leqq 2$, jinak by byla levá strana rovnice (1) alespoň 3 003. Jelikož $a \neq 0$, rozebereme dvě možnosti pro $a \in \{1, 2\}$.

▷ $a = 1$:
Potom $101b + 11c + 2d = 2\,019 - 1\,001 = 1\,018$. Pro $b \leqq 8$ by byla levá strana nejvýše $101 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 925 < 1\,018$, proto $b = 9$, což po dosazení dává $11c + 2d = 1\,018 - 909 = 109$. Dále pokud by bylo $c \leqq 8$, byla by levá strana nejvýše $88 + 18 = 106 < 109$, proto může být jedině $c = 9$, pro něž dopočítáme $d = (109 - 99)/2 = 5$. Pro $a = 1$ dostáváme jediné řešení $n = 1\,995$.

▷ $a = 2$:
Potom $101b + 11c + 2d = 2\,019 - 2\,002 = 17$. Zřejmě $b = 0$, tudíž $11c + 2d = 17$ a $c \leqq 1$. Protože pravá strana je lichá, musí být i c liché (tím jsme vyloučili $c = 0$), tedy $c = 1$, pro něž dopočítáme $d = (17 - 11)/2 = 3$. Pro $a = 2$ dostáváme rovněž jediné řešení $n = 2\,013$.

Odpověď. Úloha má dvě řešení $n = 2\,013$ a $n = 1\,995$.

Pokud řešitel postupuje podle prvního řešení a ohraničí množinu hodnot n zdola i shora tak, že zbude jen vyzkoušet nejvýše 30 možností, ale nenajde obě správná řešení, udělte 4 body (po 2 bodech za odhad čísla n shora i zdola). Zbývající 2 body rozdělte po 1 bodu za každé nalezené správné číslo n.

Pokud řešitel postupuje podle druhého řešení, udělte 1 bod za sestavení rovnice $1\,001a + 101b +$ $+ 11c + 2d = 2\,019$ a další bod, pokud se řešitel dostane ke zkoumání $a \in \{1, 2\}$. Další dva body udělte, pokud řešitel dále systematicky vylučuje různé hodnoty b, c, d a poslední 2 body udělte pouze v případě, že úkol korektně dokončí a najde obě čísla 1 995 i 2 013.

Jakkoli řešitel postupuje, pokud najde pouze jedno z řešení bez toho, že by vyloučil všechny ostatní možnosti, udělte 1 bod, a pokud uhodne obě řešení 1 995 i 2 013 bez další analýzy, udělte 2 body.

2. Tabulka 3×3 je vyplněna navzájem různými přirozenými čísly tak, že v každém řádku i sloupci je součet krajních čísel roven číslu napsanému mezi nimi. Zjistěte, jaké nejmenší číslo může být napsáno uprostřed tabulky. (*Tomáš Jurík*)

Řešení. Označme si čísla v rozích tabulky a, b, c, d (zleva doprava, shora dolů). Těmito čtyřmi čísly jsou jednoznačně určena všechna ostatní čísla tabulky, protože postupně lze dopočítat čísla mezi nimi a nakonec i číslo $a+b+c+d$ uprostřed tabulky.

a		b
c		d

$\Longrightarrow$

a	$a+b$	b
$a+c$		$b+d$
c	$c+d$	d

$\Longrightarrow$

a	$a+b$	b
$a+c$	$a+b+c+d$	$b+d$
c	$c+d$	d

Pro hodnoty $a=1$, $b=3$, $c=6$ a $d=2$ dostaneme tabulku různých čísel

1	4	3
7	12	5
6	8	2

s číslem $a+b+c+d=12$ uprostřed.

Nyní ukážeme, že uprostřed tabulky nemůže být menší číslo než 12. Menší číslo než 12 lze jako součet čtyř různých přirozených čísel dostat jen dvěma způsoby: jako $1+2+3+4$ nebo $1+2+3+5$.

V obou případech se mezi čísly vepsanými do rohů tabulky nacházejí čísla 1, 2 i 3. Vyzkoušejme, zda je lze vepsat do rohů tabulky tak, abychom ji uměli celou vyplnit požadovaným způsobem.

Čísla 1 a 2 nesmějí být napsána v témže řádku či sloupci, protože by pak mezi nimi bylo napsáno číslo 3 jako jejich součet, a my potřebujeme mít číslo 3 v některém rohu tabulky. Proto musejí být čísla 1 i 2 v protilehlých rozích tabulky. Pro číslo 3 máme již pouze dvě možná rohová pole tabulky, a ať ho vepíšeme do kteréhokoli z nich, budeme muset mezi čísla 3 a 1 vepsat číslo 4 a mezi čísla 3 a 2 číslo 5, tudíž nebudeme moci mít v posledním rohu ani číslo 4, ani číslo 5. Do rohů tabulky proto nesvedeme napsat ani čísla 1, 2, 3, 4, ani 1, 2, 3, 5, a proto číslo $a+b+c+d$ uprostřed tabulky splňující podmínky zadání má vždy hodnotu alespoň 12.

Jiné řešení. Označme čísla v rozích tabulky stejně jako v předešlém řešení a doplněním ostatních čísel v tabulce vidíme, že součet S všech čísel v tabulce je

$$S = a + (a+b) + b + (a+c) + (a+b+c+d) + (b+d) + c + (c+d) + d = \\ = 4(a+b+c+d),$$

což je číslo dělitelné čtyřmi. Přesněji, je to čtyřnásobek čísla napsaného uprostřed tabulky. Najít nejmenší možné číslo napsané uprostřed tabulky je tedy totéž jako najít čtvrtinu nejmenšího možného součtu S všech čísel napsaných v tabulce.

Každé z devíti čísel v tabulce je přirozené a napsané nejvýše jednou, proto součet S všech čísel v tabulce bude alespoň $S \geqq 1+2+\ldots+9 = 45$, což je součet devíti nejmenších přirozených čísel. Už víme, že tento součet S musí být dělitelný čtyřmi, a proto nejmenší součet všech čísel v tabulce musí být alespoň 48 (nejmenší číslo dělitelné čtyřmi, které splňuje podmínku $S \geqq 45$). Pak ovšem nejmenší možná hodnota čísla uprostřed tabulky je $S/4 = 48/4 = 12$.[1] Vyhovující tabulku najdeme zkoušením a může to být například ta z prvního řešení.

Poznámka. Počet všech vyhovujících tabulek s číslem 12 uprostřed je 8. Číslo 12 se dá napsat jako součet čtyř různých přirozených čísel pouze dvěma způsoby jako $6+3+2+1$ a $5+4+2+1$. Dá se přitom ověřit, že druhá možnost nevede k tabulce s různými čísly a že první možnost vede k správnému vyplnění tabulky, pouze pokud jsou čísla 1 a 2 v protějších rozích. Tím pádem svedeme spočítat počet vyhovujících tabulek takto: Pro číslo 1 máme čtyři možnosti, kam ho umístit, a pak už je poloha čísla 2 jednoznačně určena. Následně pro číslo 3 máme 2 možnosti, číslo 6 je v posledním volném rohu tabulky, a zbývající čísla jsou samozřejmě určena také jednoznačně. Dohromady tak existuje 8 možných příkladů pro tabulku s číslem 12 uprostřed (každý se přitom dá dostat z kteréhokoli jiného postupnými výměnami krajních řádků resp. sloupců).

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho 2 body za příklad tabulky s číslem 12 uprostřed a 4 body za důkaz, že číslo uprostřed tabulky musí být alespoň 12. Slabší výsledky oceňte takto: 1 bod za příklad tabulky s číslem 13 uprostřed; za zdůvodnění, že číslo uprostřed musí být alespoň 10, resp. 11, udělte 2, resp. 3 body.

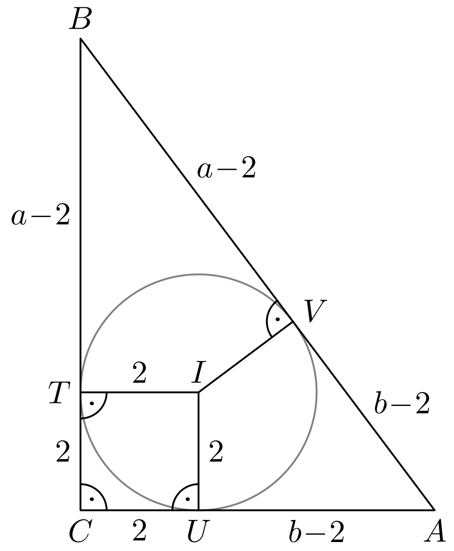
Pokud řešitel postupuje při odhadu čísla uprostřed podle druhého řešení, dejte 2 body za tvrzení, že součet všech čísel v tabulce je čtyřnásobkem čísla uprostřed. Další 2 body za ukázání, že součet musí být alespoň 48, a tedy nejmenší číslo uprostřed je 12 (jinak lze získat 4 body i za postup z poznámky pod čarou).

---

[1] Tento odhad čísla $a+b+c+d$ uprostřed tabulky lze získat i bez úvahy o celkovém součtu: Součet osmi ostatních čísel, který je alespoň $1+2+\ldots+8 = 36$, je roven $3(a+b+c+d)$, odkud $a+b+c+d \geqq 12$.

3. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž kružnice vepsaná má poloměr 2. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení. Hledaný pravoúhlý trojúhelník označme ABC tak, aby pravý úhel byl při vrcholu C, délky jeho stran označme standardně jako $|BC| = a$, $|AC| = b$ a $|AB| = c$. Navíc označme I střed vepsané mu kružnice a T, U a V postupně její body dotyku se stranami BC, AC a AB (obr. 1).



Obr. 1

Čtyřúhelník $CUIT$ má vnitřní úhly u vrcholů C, T i U pravé a navíc ze zadání plyne, že $|IT| = |IU| = 2$, proto je to čtverec. Z rovnosti $|CT| = 2$ pak máme $|BT| = a - 2$ a z rovnosti úseků tečen z vrcholu B k vepsané kružnici máme $|BV| = |BT| = a - 2$. Podobně získáme rovnosti $|AV| = |AU| = b - 2$. Velikost přepony AB tak můžeme vyjádřit jednak jako $|BV| + |AV| = (a - 2) + (b - 2) = a + b - 4$, jednak z Pythagorovy věty jako $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Odtud dostáváme rovnici, kterou umocníme a postupně upravíme:

$$
\begin{aligned}
|AB| = a + b - 4 &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Big|^2 && (1)\\
(a + b - 4)^2 &= a^2 + b^2, \\
a^2 + b^2 + 2ab - 8a - 8b + 16 &= a^2 + b^2, \\
ab - 4a - 4b + 8 &= 0, \\
(a - 4)(b - 4) &= 8. && (2)
\end{aligned}
$$

Číslo 8 se dá rozložit na součin dvou celých čísel jako

$$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = (-1) \cdot (-8) = (-2) \cdot (-4).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geqq b$ neboli $a - 4 \geqq b - 4$. Pak máme následující čtyři možnosti (hledáme ovšem jen kladná řešení, neboť jde o délky stran trojúhelníku):[2]

[2] Protože celá vepsaná kružnice leží uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC a její průměr je 4, jsou obě jeho odvěsny větší než 4, a tak jsme si mohli rozebírání dvou případů ušetřit.

▷ $a-4=8$ a $b-4=1$, odkud $a=12$, $b=5$, $c=a+b-4=13$;
▷ $a-4=4$ a $b-4=2$, odkud $a=8$, $b=6$, $c=a+b-4=10$;
▷ $a-1=-1$ a $b-4=-8$, odkud $a=0$, $b=4$, což úloze nevyhovuje;
▷ $a-1=-2$ a $b-4=-4$, odkud $a=-1$, $b=0$, což úloze nevyhovuje.

Nakonec zbývá prověřit, že vepsaná kružnice obou pravoúhlých trojúhelníků s délkami stran 5, 12, 13 a 6, 8, 10 má skutečně poloměr délky 2. Napíšeme-li její poloměr r do obr. 1 všude namísto čísla 2, dostaneme rovnost $c=a+b-2r$, z níž plyne vzorec $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, podle kterého pro obě trojice $(5,12,13)$ a $(6,8,10)$ skutečně vyjde $r=2$.

Odpověď. Hledaný trojúhelník má strany délek 5, 12, 13 nebo 6, 8, 10.

Jiné řešení. Použijeme stejné označení stran trojúhelníku jako v předešlém řešení, tj. a, b budou odvěsny a c přepona hledaného trojúhelníku ABC s obsahem S. Obsah každého trojúhelníku lze vyjádřit vzorcem $S=s\cdot r$, kde s označuje polovinu jeho obvodu a r poloměr vepsané mu kružnice. Navíc obsah pravoúhlého trojúhelníku lze vyjádřit i jako polovinu součinu jeho odvěsen. Dohromady tak dostaneme rovnici, kterou s využitím daného poloměru $r=2$, pythagorejské rovnosti $c^2=a^2+b^2$ a nerovnosti $ab>0$ upravíme do tvaru (2):

$$\begin{aligned}
S=\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}&=\frac{ab}{2},\\
(a+b+c)\cdot 2&=ab,\\
2c&=ab-2(a+b), \qquad \Big|^2\\
4c^2&=\bigl(ab-2(a+b)\bigr)^2,\\
4(a^2+b^2)&=a^2b^2-4ab(a+b)+4(a^2+2ab+b^2),\\
0&=ab(ab-4(a+b)+8),\\
0&=ab-4a-4b+8,\\
8&=(a-4)(b-4). \qquad (3)
\end{aligned}$$

A dále postupujeme jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Pokud řešitel postupuje geometrickým způsobem popsaným v prvním řešení, udělte 1 bod za napsání rovnosti $|CT|=|CU|=2$. Druhý bod dejte za vyjádření délek stran $|BT|=|BV|=a-2$ a $|AU|=|AV|=b-2$. Třetí bod za rovnost (1) a čtvrtý bod za její úpravu do tvaru (2). Zbývající 2 body připadají na její vyřešení (po bodu za každé řešení). Absenci zkoušky poloměru popsanou v závěru prvního řešení nepenalizujte.

Pokud řešitel postupuje algebraickým způsobem popsaným v druhém řešení, udělte po 1 bodu za uvedení každého ze dvou vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku a za vytvoření rovnosti mezi nimi s dosazením $r=2$ dejte třetí bod. Čtvrtý bod udělte, jestliže se řešitel dostane až k rovnici (3). Zbývající 2 body připadají na její vyřešení podobně jako v prvním řešení.

Pokud se řešiteli podařilo uhodnout strany hledaného pravoúhlého trojúhelníku a dopočítat k nim nějakým způsobem velikost poloměru vepsané kružnice (například ze vztahu $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$), za každé ze dvou řešení $(6,8,10)$, $(5,12,13)$ dejte po 1 bodu.