**69. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie B

**1.** Navzájem různá nenulová reálná čísla $a$, $b$, $c$ lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

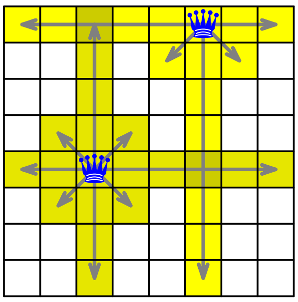
a) Rozhodněte, zda existuje trojice $(a, b, c)$ taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice $(a, b, c)$ taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen.

**2.** Je dán ostroúhlý trojúhelník s neshodnými stranami $AC$, $BC$ a průsečíkem výšek $V$. Na přímce $AB$ sestrojme body $A'$, $B'$ ($A' \neq A$, $B' \neq B$) takové, že $|CA'| = |CA|$ a $|CB'| = |CB|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $ACB'$ a $VCA'$ jsou shodné.

**3.** Určete nejmenší přirozené číslo $n$, pro něž platí: Jestliže některé přirozené číslo má alespoň $n$ trojmístných násobků, pak 840 je jedním z nich.

**4.** Netradiční figurka, kterou nazveme „nemocná dáma“, ohrožuje libovolné pole řádku i sloupce, na nichž stojí, zatímco na diagonále ohrožuje pouze pole sousední. Kolik nejméně „nemocných dam“ potřebujeme rozmístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby ohrožovaly všechna neobsazená pole?



Krajské kolo plánované na 31. března 2020 se neuskutečnilo z důvodu nouzového stavu v České republice. Postupující do krajského kola řešili jeho úlohy v internetovém klání konaném 20. června 2020.

**1.** Navzájem různá nenulová reálná čísla $a$, $b$, $c$ lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodněte, zda existuje trojice $(a, b, c)$ taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.
b) Rozhodněte, zda existuje trojice $(a, b, c)$ taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen. (*Michal Rolínek*)

**Řešení.** a) Aby měly všechny sestavené rovnice reálný kořen $x = 1$, stačí, aby nastala rovnost $a + b + c = 0$. Tato rovnost nastane například pro trojici navzájem různých čísel $a = 1$, $b = 2$ a $c = -3$.

b) Kvadratická rovnice má alespoň jeden reálný kořen, právě když je její diskriminant nezáporný. Ovšem výměnou koeficientu u $x^2$ s absolutním členem rovnice se její diskriminant nezmění. Obě tyto rovnice tak mají stejné počty reálných kořenů. Šest možných rozmístění čísel $a$, $b$, $c$ můžeme rozdělit do dvojic, které se shodují v dosazeném koeficientu u $x$. Každá taková dvojice má stejný počet kořenů, proto těch rovnic, které mají reálné kořeny, musí být sudý počet, a tudíž jich nemůže být pět.

*Poznámka.* Vzhledem k úvahám v části b) stačí k řešení části a) nalézt takovou trojici čísel $(a, b, c)$, že současně platí

$$a^2 - 4bc \geqq 0, \quad b^2 - 4ac \geqq 0, \quad c^2 - 4ab \geqq 0. \tag{1}$$

Nejprve si uvědomíme, že pokud tyto nerovnosti platí pro trojici reálných čísel $(a, b, c)$, pak také platí pro trojici $(-a, -b, -c)$. Ukážeme, že taková trojice nemůže obsahovat jen kladná nebo jen záporná čísla. Vzhledem k symetrii nerovností (1) můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a$ je nejmenší z trojice kladných čísel $(a, b, c)$. Potom ale $a^2 \leqq bc < 4bc$, což je ve sporu s nerovností $a^2 - 4bc \geqq 0$. Trojici čísel vyhovující nerovnostem (1) tak můžeme hledat například za podmínek $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. Potom platí $ac < 0$ a $bc < 0$, tedy druhá a první nerovnost z (1) jsou zřejmě splněny a pro splnění třetí nerovnosti stačí volit $c \geqq 2\sqrt{ab}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Za správné řešení části a) udělte 2 body. Z toho 1 bod za uvedení alespoň jedné vyhovující trojice $(a, b, c)$ navzájem různých čísel a 1 bod za zdůvodnění, že každá ze šesti vzniklých rovnic má reálný kořen.

Za správné řešení části b) udělte 4 body, z toho 2 body za úvahu, že právě pět z šesti možných diskriminantů by mělo být nezáporných, a 2 body za pozorování, že těchto šest diskriminantů lze rozdělit na tři dvojice sobě rovných výrazů.

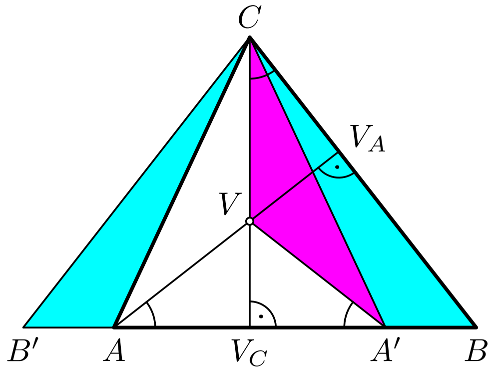
**2.** Je dán ostroúhlý trojúhelník s neshodnými stranami $AC$, $BC$ a průsečíkem výšek $V$. Na přímce $AB$ sestrojme body $A'$, $B'$ ($A' \neq A$, $B' \neq B$) takové, že $|CA'| = |CA|$ a $|CB'| = |CB|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $ACB'$ a $VCA'$ jsou shodné. (*Jaroslav Švrček*)

**Řešení.** Označme $V_A$ a $V_C$ paty výšek procházejících po řadě vrcholy $A$ a $C$. Trojúhelníky $ABV_A$ a $CBV_C$ se shodují v pravých úhlech při vrcholech $V_A$ a $V_C$ a ve vnitřním úhlu při (společném) vrcholu $B$ (obr. 1). Shodují se tak i ve vnitřních úhlech u zbývajících vrcholů $A$ a $C$ vyznačených na obrázku obloučky, takže platí

$$|\sphericalangle V_A AB| = |\sphericalangle V_C CB| = |\sphericalangle VCB|.$$

Body $A$ a $A'$ jsou souměrně sdružené vzhledem k bodu $V_C$ (a také podle přímky $CV_C$), takže platí

$$|\sphericalangle VA'V_C| = |\sphericalangle VAV_C| = |\sphericalangle V_A AB| = |\sphericalangle VCB|.$$




Obr. 1

Jelikož body $A'$ a $B$ leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou $CV$, je čtyřúhelník $A'BCV$ tětivový (součty velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů $C$ a $A'$ jsou rovny $180°$), trojúhelníky $VCA'$ a $A'CB$ tak mají shodnou kružnici opsanou.

Podle zadání je trojúhelník $ACB'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem $A'CB$ vzhledem k přímce $CV_C$, mají tak shodné opsané kružnice. Odtud již plyne, že kružnice opsané trojúhelníkům $ACB'$ a $VCA'$ jsou rovněž shodné.

**Jiné řešení.** Při standardním označení velikostí stran a vnitřních úhlů trojúhelníku $ABC$ platí pro poloměr $r_1$ kružnice opsané trojúhelníku $ACB'$ podle rozšířené sinové věty

$$r_1 = \frac{|CB'|}{2\sin|\sphericalangle CAB'|} = \frac{|CB|}{2\sin(180° - \alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Vidíme tak, že tento poloměr $r_1$ je shodný s poloměrem $r$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$. To ostatně plyne i z toho, že množina všech bodů, z nichž je vidět úsečku $AC$ pod úhlem $\beta$, je tvořena dvěma shodnými oblouky kružnic.

Nechť $V_A$ a $V_C$ jsou stejně jako v předchozím řešení paty výšek trojúhelníku $ABC$ z odpovídajících vrcholů $A$ a $C$. Trojúhelníky $AVV_C$ a $ABV_A$ se shodují ve (společném) vnitřním úhlu při vrcholu $A$ a v pravých úhlech při vrcholech $V_C$ a $V_A$, shodují se proto i v úhlech při vrcholech $V$ a $B$:

$$|\sphericalangle AVV_C| = |ABV_A| = \beta.$$

Ze souměrné sdruženosti bodů $A$ a $A'$ podle přímky $CV$ plyne

$$|\sphericalangle A'VC| = |\sphericalangle AVC| = 180^\circ - |\sphericalangle AVV_C| = 180^\circ - \beta.$$

Pro poloměr $r_2$ kružnice opsané trojúhelníku $VCA'$ pak opět podle rozšířené sinové věty platí

$$r_2 = \frac{|CA'|}{2\sin|\sphericalangle CVA'|} = \frac{|CA|}{2\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{b}{2\sin\beta} = r = r_1.$$

Rovnost poloměrů $r_1$ a $r_2$ znamená shodnost kružnic opsaných trojúhelníkům $ACB'$ a $VCA'$, kterou jsme měli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho udělte 1 bod za správné vyjádření velikosti některého úhlu, který svírá strana trojúhelníku se spojnicí vrcholu a ortocentra $V$, 1 bod za správné odvození velikosti některého z úhlů, které svírají výšky v ortocentru. Za úvahu o shodnosti trojúhelníků $AB'C$ a $A'BC$, resp. za úvahu o symetrii podle přímky $CV$ udělte 1 bod. Při prvním postupu dále udělte 1 bod za důkaz, že čtyřúhelník $A'BCV$ je tětivový. Při druhém postupu udělte 1 bod za správné vyjádření některého z poloměrů $r_1$ a $r_2$. Konečně posledními 2 body oceňte správné dokončení důkazu.

**3.** Určete nejmenší přirozené číslo $n$, pro něž platí: Jestliže některé přirozené číslo má alespoň $n$ trojmístných násobků, pak 840 je jedním z nich. (*Michal Rolínek*)

**Řešení.** Z rozkladu $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ vidíme, že nejmenší přirozené číslo, které není dělitelem čísla 840, je číslo $9 = 3^2$. Trojmístné násobky čísla 9 jsou

$$108 = 9 \cdot 12,\ 117 = 9 \cdot 13,\ \ldots,\ 999 = 9 \cdot 111,$$

celkem jich je $111 - 12 + 1 = 100$ (a číslo 840 rozhodně mezi nimi není). Příklad čísla 9 tak ukazuje, že požadovanou vlastnost nemá žádné číslo $n \leqq 100$.

V druhé části řešení ukážeme, že číslo $n = 101$ už požadovanou vlastnost má. K tomu stačí ověřit, že každé přirozené číslo, které má aspoň 101 trojmístných násobků, je menší než 9 — pak totiž je, jak už víme, dělitelem čísla 840. Jinak řečeno, stačí ověřit, že každé přirozené číslo $a \geqq 10$ má nejvýše 100 trojmístných násobků. To je však snadné: dokonce počet všech jeho násobků menších než 1000 je nejvýše $999/a \leqq 99{,}9 < 100$, a proto i počet jeho trojmístných násobků je menší než 100.

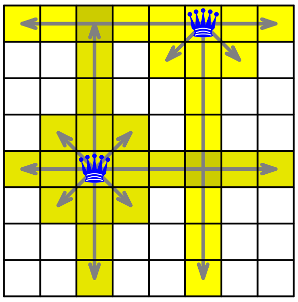
Hledané číslo $n$ je rovno 101.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Důkaz nerovnosti $n > 100$ ohodnoťte 3 body, z toho pozorování, že nejmenší číslo, které není dělitelem čísla 840, je číslo 9, ohodnoťte 1 bodem a 1 bod udělte za správné určení počtu trojmístných násobků čísla 9. K tomu ovšem nestačí pouhé vydělení $900 : 9 = 100$ bez dalšího komentáře.

Důkaz, že $n = 101$ vyhovuje, ohodnoťte rovněž 3 body. Za tuto část řešení udělte pouze 1 bod, pokud řešitel zjistí, že čísla od 1 do 8 mají trojmístných násobků každé alespoň 112, a odtud chybně usoudí, že $n = 112$ je hledaná hodnota.

**4.** Netradiční figurka, kterou nazveme „nemocná dáma“, ohrožuje libovolné pole řádku i sloupce, na nichž stojí, zatímco na diagonále ohrožuje pouze pole sousední. Kolik nejméně „nemocných dam“ potřebujeme rozmístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby ohrožovaly všechna neobsazená pole?



(*Tomáš Bárta, Josef Tkadlec*)

**Řešení.** Pole ohrožené nemocnou dámou (jiné dámy dále ani neuvažujeme) nazvěme *přímo ohrožené*, pokud leží ve sloupci nebo v řadě, kde dáma stojí; ohrožená pole, která nejsou ohrožená přímo, nazvěme *nepřímo ohrožená*. Každá dáma tak ohrožuje 15 polí přímo (včetně pole, na němž stojí) a nejvýše 4 pole nepřímo.

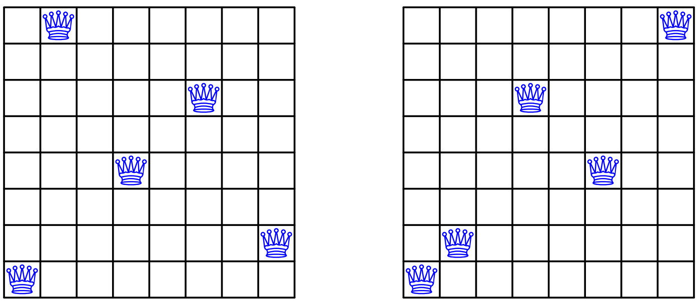
Nejprve ukážeme, že při libovolném rozmístění nejvýše čtyř dam na šachovnici není aspoň jedno pole ohroženo žádnou dámou, jinými slovy, že čtyři dámy neohrožují celou šachovnici. Odtud již zřejmě plyne, že ani menší počet dam neohrozí všechna pole šachovnice.

Připusťme, že požadované rozmístění čtyř dam existuje. Jistě najdeme 4 řádky a 4 sloupce šachovnice, v nichž žádná ze čtyř těchto dam nestojí. Tyto řádky a sloupce se protínají v 16 polích, která musejí být všechna ohrožena nepřímo. Protože každá dáma ohrožuje nepřímo nejvýše 4 pole, musí každá ze čtyř daných dam nepřímo ohrožovat právě 4 pole. Navíc žádné dvě z nich nestojí v témže řádku či sloupci, protože jinak by počet polí, která jsou našimi čtyřmi dámami ohrožena nepřímo, musel být dokonce větší než 16 (existoval by totiž ještě pátý řádek či sloupec, na němž žádná dáma nestojí).

Žádná dáma, která nepřímo ohrožuje 4 pole, nemůže zřejmě stát ani v krajním řádku, ani v krajním sloupci šachovnice. Čtyři rohová pole celé šachovnice jsou tak v naší situaci ohrožena nepřímo, každé jinou ze čtyř dam, které nutně stojí na polích diagonálně sousedících s poli rohovými. Stojí tak po dvou ve stejných řádcích (i po dvou ve stejných sloupcích), což odporuje závěru prvního odstavce. Tím jsme dokázali, že k ohrožení všech polí šachovnice nejvýše čtyři dámy nestačí.

Jak vidíme z následujících obrázků, 5 dam můžeme umístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby každé pole šachovnice bylo ohroženo aspoň jednou dámou.

Hledaný nejmenší potřebný počet (nemocných) dam je pět.



Obr. 2

*Poznámka.* Z odborné literatury je známo, že nejmenší počet „normálních dam“, které můžeme umístit na šachovnici $8 \times 8$ tak, aby ohrozily všechna její pole (tzv. dominanční číslo pro graf dam $Q(8)$, domination number for queens' graph $Q(8)$), je roven 5. Tedy počet „nemocných dam“ musí být alespoň 5, protože tyto dámy ohrožují méně polí než „normální dámy“. Dále můžeme počítačovou simulací zjistit, že existuje jen 8 vhodných rozestavení 5 nemocných dam, všechna vzniknou ze dvou výše uvedených otočením (nebo souměrností).

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za důkaz nerovnosti $n > 4$ (včetně možnosti, že znalý řešitel prohlásí tu nerovnost i pro běžné dámy za známou) udělte 3 body (tolerujte, chybí-li přitom zmínka o hodnotách $n < 4$). Za příklad správného rozestavení 5 dam udělte 3 body. Za pouhý příklad správného rozestavení 6 dam udělte 1 bod.