69. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a a b, jejichž největší společný dělitel je roven oběma číslům $30 - a$ i $42 - b$.

2. Konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ má všechny strany stejně dlouhé a protější dvojice stran rovnoběžné. Uvažme body X, Y, Z takové, že čtyřúhelníky $ABCX$, $DEFY$, $GHAZ$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $XZ \perp AY$.

3. Kolik trojmístných čísel má tu vlastnost, že vyškrtnutím některé číslice dostaneme dvojmístné číslo, které je druhou mocninou nějakého celého čísla? (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojmístná čísla.)

4. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$. Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2.$$

Krajské kolo plánované na 31. března 2020 se neuskutečnilo z důvodu nouzového stavu v České republice. Postupující do krajského kola řešili jeho úlohy v internetovém klání konaném 20. června 2020.

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a a b, jejichž největší společný dělitel je roven oběma číslům $30 - a$ i $42 - b$. *(Patrik Bak)*

Řešení. Označme d největšího společného dělitele čísel a a b. Protože d dělí a i b a zároveň $d = 30 - a = 42 - b$, dělí d jak čísla 30 a 42, tak tedy i jejich největšího společného dělitele 6. Pro každou z možností $d \in \{1, 2, 3, 6\}$ již snadno dopočítáme hodnoty $a = 30 - d$ resp. $b = 42 - d$ a prověříme, zda d je skutečně jejich největší společný dělitel (a, b):

d	a	b	(a, b)
1	**29**	**41**	**1**
2	$28 = 2^2 \cdot 7$	$40 = 2^3 \cdot 5$	4
3	$\mathbf{27} = 3^3$	$\mathbf{39} = 3 \cdot 13$	**3**
6	$24 = 2^3 \cdot 3$	$36 = 2^2 \cdot 3^2$	12

Hodnoty v prvním a posledním sloupci tabulky se rovnají pouze pro $d = 1$ a $d = 3$, proto řešením úlohy jsou dvojice $a = 29$, $b = 41$ a dvojice $a = 27$, $b = 39$.

Jiné řešení. Největší společný dělitel d čísel a a b nepřevyšuje ani jedno z těchto čísel. Proto $d = 30 - a \leqq a$, z čehož vyplývá $15 \leqq a$. Na druhé straně, $1 \leqq d = 30 - a$, což po úpravě dává nerovnost $a \leqq 29$. Teď už jen stačí vyzkoušet hodnoty $a \in \{15, 16, \dots, 29\}$,[1] k nim dopočítat $b = a + 12$ (jak plyne z rovnosti $30 - a = 42 - b$) a prověřit, které dvojice mají největšího společného dělitele d rovného číslu $30 - a = 42 - b$.

a	b	d	$30 - a$
15	27	3	15
16	28	4	14
17	29	1	13
18	30	6	12
19	31	1	11

a	b	d	$30 - a$
20	32	4	10
21	33	3	9
22	34	2	8
23	35	1	7
24	36	12	6

a	b	d	$30 - a$
25	37	1	5
26	38	2	4
27	**39**	**3**	**3**
28	40	4	2
29	**41**	**1**	**1**

Jiné řešení. Číslo d je největší společný dělitel čísel a a b, právě když pro vhodná nesoudělná čísla k, l platí rovnosti $a = kd$ a $b = ld$. Dosaďme do nich vyjádření čísel a a b ze zadaných podmínek $d = 30 - a$ a $d = 42 - b$. Dostaneme rovnosti $30 - d = kd$ a $42 - d = ld$, které přepíšeme takto:

$$30 = (k + 1)d \quad \text{a} \quad 42 = (l + 1)d.$$

Odtud plyne úměra $5 : 7 = (k + 1) : (l + 1)$, a vzhledem k nesoudělnosti čísel 5 a 7 tak pro vhodné přirozené n musí platit $k + 1 = 5n$ a $l + 1 = 7n$. Obě rovnosti s čísly 30 a 42 se pak redukují na jedinou rovnost, totiž $6 = nd$.

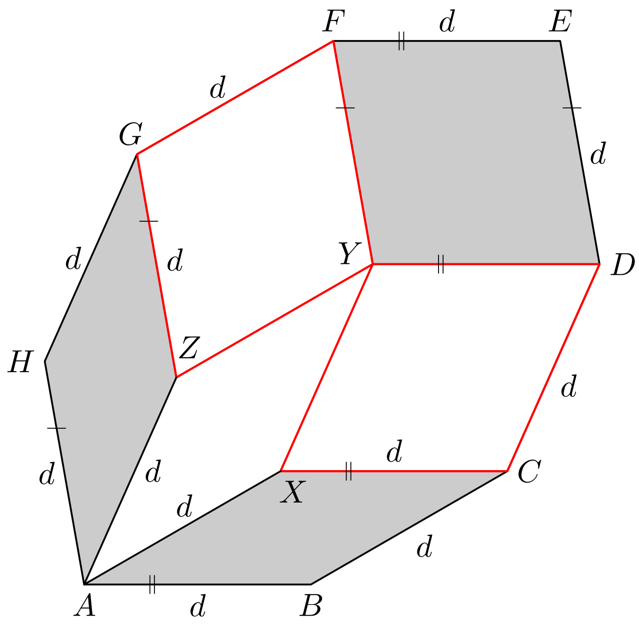
Nesoudělná čísla $k = 5n - 1$ a $l = 7n - 1$ nemohou být obě sudá, tudíž sudé musí být naopak číslo n. Rovnost $6 = nd$ tak připouští pouze hodnoty $n = 2$ a $n = 6$. Pro $n = 2$, kdy $d = 3$, vycházejí skutečně nesoudělná čísla $k = 9$ a $l = 13$, kterým tak odpovídá první řešení úlohy $a = kd = 27$ a $b = ld = 39$. Podobně druhé řešení, tvořené (tentokrát nesoudělnými) čísly $a = 29$ a $b = 41$, dostaneme pro $n = 6$, kdy totiž $d = 1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení každého z obou řešení udělte po 1 bodu, za omezení diskutovaných případů na konečný počet udělte další bod a za jejich prověrku podle míry úplnosti a numerické bezchybnosti nejvýše 3 body.

[1] Podobně můžeme vymezit možné hodnoty b, jichž je však (o něco) více: $b \in \{21, 22, \dots, 41\}$. Samozřejmě je možné i bez úvahy z prvních dvou vět řešení rovnou pracněji vyzkoušet všechny hodnoty $a \in \{1, 2, \dots, 29\}$ či $b \in \{1, 2, \dots, 41\}$.

2. Konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ má všechny strany stejně dlouhé a protější dvojice stran rovnoběžné. Uvažme body X, Y, Z takové, že čtyřúhelníky $ABCX$, $DEFY$, $GHAZ$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $XZ \perp AY$. (*Josef Tkadlec*)

Řešení. Označme d délku strany uvažovaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$. Především si uvědomme, že všechny tři zmíněné rovnoběžníky $ABCX$, $DEFY$, $GHAZ$ jsou dokonce kosočtverce, neboť vždy dvě jejich sousední strany jsou stranami uvažovaného osmiúhelníku, a mají tudíž stejnou délku (obr. 1). Stačí tedy dokázat, že i $AXYZ$ je kosočtverec, protože pak by z kolmosti jeho úhlopříček hned plynulo požadované tvrzení, že $XZ \perp AY$.



Obr. 1

Čtyřúhelníky $ABCX$ i $DEFY$ jsou kosočtverce a navíc protilehlé strany AB a EF osmiúhelníku $ABCDEFGH$ jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, proto jsou rovnoběžné a stejně dlouhé i strany XC a YD, což znamená, že čtyřúhelník $XCDY$ je rovnoběžník se shodnými sousedními stranami ($|XC| = |CD| = d$), takže $XCDY$ je zároveň kosočtverec.

Úplně stejně dokážeme, že i čtyřúhelník $GZYF$ je kosočtverec (čtyřúhelníky $HAZG$ a $DEFY$ jsou kosočtverce a protilehlé strany HA a ED osmiúhelníku $ABCDEFGH$ jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, tudíž $|GZ| = |FY| = d = |GF|$).

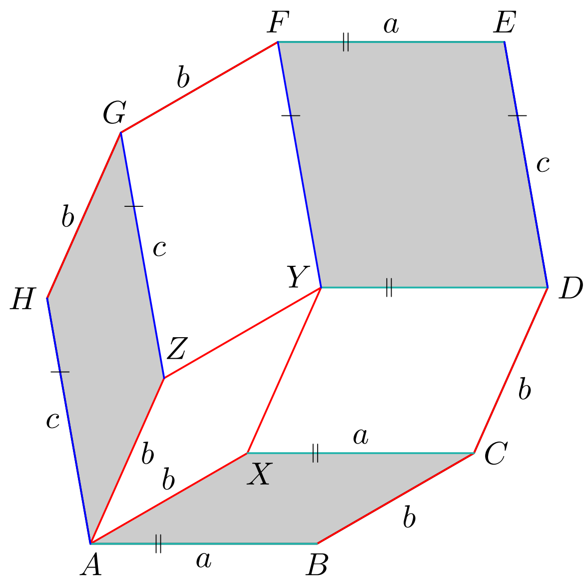
Je tedy $|ZY| = |GF| = d = |CD| = |XY|$, takže čtyřúhelník $AXYZ$ má všechny strany stejně dlouhé, tudíž je kosočtverec, jak jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Poté, co jsme dokázali, že čtyřúhelník $XCDY$ je kosočtverec, mohli jsme analogický postup použít i na dvojici kosočtverců $HAZG$ a $XCDY$ s rovnoběžnými stranami HG a CD téže délky d, a dostat tak rovnou, že rovnoběžník $AXYZ$ mezi nimi je kosočtverec.

Jiné řešení. Uvedeme postup bez užití poznatku, že $XCDY$ a $GZYF$ jsou kosočtverce. Vystačíme se zdůvodněním, že se jedná o dva rovnoběžníky.

Uvědomme si, že úsečky YD, FE, AB a XC jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. To znamená, že $XCDY$ je rovnoběžník, a tudíž úsečky XY a CD jsou rovnoběžné. Protože navíc $CD \parallel GH \parallel AZ$, je také $XY \parallel AZ$. Podobně zdůvodníme, že $GZYF$ je rovnoběžník a že $ZY \parallel AX$. Dohromady tak dostáváme, že $AXYZ$ je rovnoběžník. Protože také $ABCX$ a $AZGH$ jsou rovnoběžníky, jsou obě délky $|AX|$ a $|AZ|$ rovny délce strany daného osmiúhelníka. Rovnoběžník $AXYZ$ je tudíž kosočtverec a z kolmosti jeho úhlopříček plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Z předchozího řešení je vidět, že závěr úlohy platí i pro obecnější konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$. Stačí, aby každé dvě jeho protější strany byly stejně dlouhé a rovnoběžné a aby navíc stejně dlouhé byly i sousední strany BC a CD (obr. 2).



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Při postupu z prvního řešení udělte 3 body za zdůvodnění, že $XCDY$ nebo $GZYF$ je kosočtverec, celkem 4 body za oba tyto kosočtverce, další bod za vysvětlení, proč $AXYZ$ je kosočtverec, a za konstatování kolmosti jeho úhlopříček poslední bod.

Při postupu z druhého řešení udělte 1 bod za zdůvodnění, že $XCDY$ nebo $GZYF$ je rovnoběžník, celkem 2 body za oba tyto rovnoběžníky, po 1 bodu pak za důkazy relací $XY \parallel AZ$ a $ZY \parallel AX$, další bod pak za vysvětlení, proč rovnoběžník $AXYZ$ je kosočtverec, a za konstatování kolmosti jeho úhlopříček poslední bod.

Pokud řešitel bez důkazu z obrázku usoudí, že čtyřúhelník $AXYZ$ je kosočtverec, udělte 2 body (za nepodložené zjištění, že je to rovnoběžník, bod neudělujte).

Pokud řešitel bez důkazu z obrázku usoudí, že čtyřúhelník $XCDY$ (nebo symetricky $FGZY$) je kosočtverec a o čtyřúhelníku $AXYZ$ se vůbec nezmíní, udělte 2 body (resp. 1 bod, pokud tvrdí, že je to rovnoběžník).

3. Kolik trojmístných čísel má tu vlastnost, že vyškrtnutím některé číslice dostaneme dvojmístné číslo, které je druhou mocninou nějakého celého čísla? (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojmístná čísla.) (*Tomáš Bárta, Tomáš Jurík*)

Řešení. Označme číslici, kterou z hledaného trojmístného čísla škrtáme, jako x a výsledné dvojmístné číslo jako $\overline{ab}$ ($a \neq 0$). Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel, jsou pouze čísla z množiny

$$\mathsf{M} = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}.$$

Pokud jsme vyškrtli první číslici, tedy z čísla $\overline{xab}$ jsme dostali číslo $\overline{ab}$, hodnota číslice x může být od 1 po 9 (původní číslo je trojmístné, proto $x \neq 0$). Takových čísel je $9 \cdot 6$, protože máme 9 možností pro číslici x a 6 možností pro číslo $\overline{ab}$ z množiny M. Pokud jsme vyškrtli prostřední nebo poslední číslici, máme v obou případech $10 \cdot 6$ možností, neboť číslice x může být v těchto případech libovolná od 0 do 9. Celkově to je $(9 + 10 + 10) \cdot 6 = 174$ možností, kterými můžeme z nějakého trojmístného čísla dostat dvojmístné číslo z množiny M.

Úloha se ale ptá na počet trojmístných čísel a my jsme některá čísla mohli započítat vícekrát. Jedno číslo můžeme započítat nejvýše třikrát, protože máme pouze tři možnosti, kterou číslici vyškrtneme. Prozkoumejme nejprve, kolik čísel jsme započítali dvakrát, jako například číslo 116, v němž dvěma možnostmi můžeme vyhovujícím způsobem škrtat cifry (první a prostřední).

Dvakrát jsme mohli započítat pouze čísla tvaru $\overline{aab}$, $\overline{abb}$ nebo takové číslo $\overline{abc}$ s různými číslicemi, že dvě z výsledných čísel $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ leží v množině M. Protože každé číslo $\overline{ab}$ z množiny M má různé číslice, je z něj možné vytvořit dvě taková čísla — $\overline{aab}$ a $\overline{abb}$. Těchto čísel je dohromady $6 \cdot 2$. Čísel typu $\overline{abc}$ je 6, neboť to jsou ta čísla, která ve svém zápisu obsahují dvě různá čísla z množiny M se společnou číslicí, a postupným probráním takových dvojic z M zjistíme, že jde o čísla 816, 649, 136, 316, 164 a 364.

Nyní ještě ukážeme, že jsme žádné číslo nemohli započítat třikrát, tj. že bychom po vyškrtnutí libovolné jeho číslice dostali nějaké číslo z množiny M. K tomu si stačí uvědomit, že jedinými kandidáty na trojnásobné započítání je 18 čísel nalezených v předchozím odstavci, načež vyškrtáním číslic zjistíme, že žádné z nich nevyhovuje. Anebo můžeme neexistenci takového třikrát započteného čísla dokázat sporem:

Připusťme existenci čísla $\overline{def}$ (některé jeho číslice mohou být stejné) s vlastností, že čísla $\overline{de}$, $\overline{ef}$ i $\overline{df}$ leží v množině M. Číslice d a e se nemohou rovnat, protože číslo $\overline{de}$ se dvěma stejnými číslicemi se v množině M nenachází. Tedy dvě různá čísla $\overline{ef}$ a $\overline{df}$ z množiny M mají poslední číslici stejnou, což jak vidíme, může být pouze číslice 6. Jedinou možností v tom případě je, že čísla $\overline{ef}$ a $\overline{df}$ jsou v nějakém pořadí čísla 16 a 36. Nakonec by číslo $\overline{de}$ muselo být 13 nebo 31, ani jedno však do množiny M nepatří. Žádné číslo jsme tedy nemohli započítat třikrát.

Hledaný počet čísel je $174 - 12 - 6 = 156$.

Jiné řešení. Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel, jsou pouze čísla z množiny

$$\mathsf{M} = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}.$$

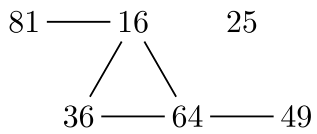
Pro zvolené dvojmístné číslo nazveme jeho *potomkem* trojmístné číslo, které vznikne přidáním jedné číslice. Hledaná trojmístná čísla jsou potomky čísel z M. Nejdříve spočítáme počet potomků jednoho čísla z M, například čísla 16.

Počítání potomků čísla 16 rozdělíme na tři kroky podle toho, kam číslici přidáváme. V každém kroku najdeme 9 nových potomků, což nám dá celkově $3 \cdot 9 = 27$ potomků.

1. Přidáváme před dvojčíslí 16 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 1 až 9.

2. Přidáváme mezi číslice 1 a 6 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 0 až 9 kromě číslice 1, protože potomka 116 už jsme započítali v předchozím kroku.
3. Přidáváme za dvojčíslí 16 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 0 až 9 kromě číslice 6, protože potomka 166 už jsme započítali v předchozím kroku. (Potomek z tohoto kroku se jistě liší od potomka z 1. kroku, protože mají různou prostřední číslici.)

Zopakováním analogické úvahy najdeme 27 potomků ke každému číslu z M, což dohromady dává $6 \cdot 27 = 162$ potomků. Někteří potomci ovšem mohou mít více než jednoho rodiče z M. Například číslo 816 má za rodiče jak číslo 16, tak číslo 81. Pokud mají některá dvě čísla z M stejného potomka, mají společnou aspoň jednu číslici. Nakreslíme schéma, v němž jsou čísla z M spojena, pokud sdílejí číslici.



Pro každou spojenou dvojici spočítáme počet společných potomků. Dvojice $(81, 16)$, $(16, 64)$, $(36, 64)$, $(64, 49)$ mají společného jednoho potomka (postupně 816, 164, 364 a 649), protože nutně sdílejí jeho prostřední číslici. Dvojice $(16, 36)$ má společné dva potomky (136 a 316), protože nutně sdílí jejich poslední číslici. Určených šest společných potomků je navzájem různých, a proto žádný z nich nemá více než dva rodiče, tudíž se každý z nich v počtu 162 potomků objeví dvakrát (jednou za každého rodiče), takže celkem máme $162 - 6 = 156$ různých potomků.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Při postupu z prvního řešení ohodnoťte 3 body úplné zdůvodnění 174 možností pro konstrukci čísel bez úvahy, že některá z nich jsou započítána vícekrát, z toho 1 bod dejte za správné určení 6prvkové množiny M dvojmístných čísel a zbylé 2 body za výpočet $(9 + 10 + 10) \cdot 6 = 174$. Zbývající 3 body rozdělte na 1 bod za 12 čísel typu $\overline{aab}$ a $\overline{abb}$, 1 bod za šest trojmístných čísel s různými číslicemi, z nichž je možné dvěma způsoby dostat druhou mocninu celého čísla, a poslední bod za zdůvodnění, že žádné číslo nemohlo být započteno třikrát, a dokončení výpočtu.

Při postupu z druhého řešení ohodnoťte 4 body úplné zdůvodnění 162 možností pro konstrukci potomků bez úvahy, že jsou započítáni podle počtu svých rodičů, z toho 1 bod za určení množiny M a 3 body za výpočet $6 \cdot (9 + 9 + 9) = 162$. Zbylé 2 body udělte za vyhledání všech 6 potomků, kteří mají více než jednoho rodiče, konstatování, že jde vždy o rodiče dva, a dokončení výpočtu.

4. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

(*Ján Mazák*)

Řešení. Všimněme si, že výraz $a+b+c$ obsahuje pouze první mocniny proměnných, a výraz, se kterým máme dále pracovat, obsahuje jejich druhé mocniny. Roznásobením a úpravou výrazu V ze zadání dostaneme

$$\begin{aligned} V &= (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca) = \\ &= a^2+b^2+c^2+1, \end{aligned} \tag{1}$$

neboť

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2=1. \tag{2}$$

Čísla a, b, c jsou nezáporná, tudíž i výraz $ab+bc+ac$ je nezáporný, a tak z rovnosti (2) plyne odhad

$$a^2+b^2+c^2 \leqq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=1.$$

Po dosazení do vztahu (1) dostáváme, že největší možná hodnota výrazu V je 2, jež vyjde pro $a=1$, $b=c=0$.

Z úlohy domácího kola víme, že platí nerovnost

$$ab+bc+ac \leqq a^2+b^2+c^2, \tag{3}$$

kterou dostaneme roznásobením a úpravou zřejmé nerovnosti

$$0 \leqq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Dosazením dvojnásobku nerovnosti (3) do rovnosti (2) dostaneme odhad

$$1=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \leqq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Odtud pro hodnotu výrazu V plyne odhad

$$V=a^2+b^2+c^2+1 \geqq \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3},$$

přičemž této hodnoty dosáhne daný výraz pro $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Jiné řešení. Označme $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$. Ze zadání plyne rovnost $x+y+z=2(a+b+c)=2$, za kteréžto podmínky hledáme největší a nejmenší hodnotu výrazu $V=x^2+y^2+z^2$.

Podle známé nerovnosti $x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ platí

$$3V=3x^2+3y^2+3z^2 \geqq x^2+y^2+x^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2=4,$$

a proto $V \geqq \frac{4}{3}$, přičemž rovnosti dosáhneme například pro $x=y=z=\frac{2}{3}$ neboli $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Při hledání největší možné hodnoty zadaného výrazu nám bude stačit využít nezápornost čísel a, b, c. Čísla x, y, z jsou stejně jako čísla a, b, c nezáporná a nejvýše rovná jedné (každé z nich je dle definice nejvýše rovno součtu $a+b+c=1$). Proto platí $x^2 \leqq x$, $y^2 \leqq y$, $z^2 \leqq z$. Po sečtení těchto nerovností dostáváme

$$V=x^2+y^2+z^2 \leqq x+y+z=2,$$

přičemž rovnosti dosáhneme například pro $a=1$, $b=c=0$ ($x=z=1$, $y=0$).

Jiné řešení. Ukážeme ještě jeden postup, a to pouze pro určení nejmenší hodnoty zadaného výrazu V.

Často se stává, že se minimum nebo maximum nějakého výrazu, který je symetrický v zastoupených proměnných, dosahuje, pokud mají tyto proměnné stejnou hodnotu. V naší úloze je pro $a=b=c=\frac{1}{3}$ hodnota daného výrazu V rovna $\frac{4}{3}$. Zaveďme proto čísla u, v, w vztahy

$$u=a-\frac{1}{3},\quad v=b-\frac{1}{3},\quad w=c-\frac{1}{3}.$$

Potom z podmínky $a+b+c=1$ zřejmě plyne $u+v+w=0$, a proto navíc

$$a+b=\left(u+\frac{1}{3}\right)+\left(v+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+(u+v)=\frac{2}{3}-w,$$

analogicky $b+c=\frac{2}{3}-u$ a $c+a=\frac{2}{3}-v$. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} V&=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=\\ &=\left(\frac{2}{3}-w\right)^2+\left(\frac{2}{3}-u\right)^2+\left(\frac{2}{3}-v\right)^2=\\ &=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\cdot(u+v+w)+(u^2+v^2+w^2)=\\ &=\frac{4}{3}+(u^2+v^2+w^2)\geqq\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

neboť čísla u^2, v^2, w^2 jsou nezáporná, přitom rovnost v dokázané nerovnosti $V\geqq\frac{4}{3}$ nastane, právě když platí $u=v=w=0$ neboli $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Jiné řešení. Pokud hledané hodnoty $V=\frac{4}{3}$ a $V=2$ zkusmo uhodneme, postačí nám k vyřešení úlohy dokázat, že pro *libovolná* nezáporná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$\frac{4}{3}\cdot(a+b+c)^2\leqq(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\leqq2\cdot(a+b+c)^2.$$

Svedeme to rutinním postupem — ekvivalentními úpravami každé z obou nerovností. Pro levou nerovnost tak postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 4(a+b+c)^2&\leqq3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2,\\ 4(a^2+b^2+c^2)+8(ab+bc+ca)&\leqq6(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca),\\ 0&\leqq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \end{aligned}$$

Nerovnost je dokázána, navíc vidíme, že rovnost v ní nastane, právě když $a=b=c$ ($=\frac{1}{3}$ v naší úloze).

Ještě snazší je postup pro druhou nerovnost, kterou na prvním řádku zopakujeme:

$$\begin{aligned} (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2&\leqq2\cdot(a+b+c)^2,\\ 2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)&\leqq2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca),\\ 0&\leqq2(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Tentokrát v dokázané nerovnosti nastane rovnost, právě když všechna tři nezáporná čísla ab, bc, ca se rovnají nule, tedy právě když aspoň dvě z čísel a, b, c jsou rovna nule (v naší úloze tehdy tvoří trojici $0, 0, 1$ v některém pořadí).

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení a zdůvodnění největší i nejmenší hodnoty udělte po 3 bodech. Z úplného zisku však strhněte po 1 bodu, pokud řešitel neuvede konkrétní příklad, kdy je dosažena nejmenší, resp. největší hodnota. Naopak po 1 bodu udělte za pouhé uvedení nejmenší, resp. největší hodnoty, pokud je ovšem doložena patřičným příkladem. Za uvedení obou hodnot bez zdůvodnění či příkladů udělte 1 bod.