61. mezinárodní matematická olympiáda

Letošní Mezinárodní matematická olympiáda se původně měla konat v červenci v Petrohradě. Kvůli koronavirové pandemii byla ovšem nejprve přesunuta na konec září, a nakonec bylo rozhodnuto o tom, že celá soutěž proběhne v on-line formátu. Ruští organizátoři se zároveň nabídli, že by se v Petrohradě mohla konat IMO 2021. Nehledě na tyto komplikace se olympiády zúčastnilo 616 soutěžících ze 105 zemí. České delegaci se povedlo vybojovat jednu zlatou, dvě stříbrné a tři bronzové medaile.

Kvůli neobvyklé formě soutěže se letos na výběru soutěžních úloh nepodíleli vedoucí národních delegací. Šestici příkladů ze čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) tak vybírala speciální komise pověřená ruskými organizátory. Vybrané úlohy naleznete na konci této zprávy.

Organizátoři se rozhodli udělat všechno možné pro zachování regulérnosti IMO i při takovém netradičním provedení. Český tým soutěžil ve dnech 21. a 22. září v karlínské budově Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy pod dozorem obou vedoucích, nezávislého pozorovatele a kamery. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh. Za každou úlohu mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že přibližně polovina soutěžících olympiády dostává medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentovali *Václav Janáček* z Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Samuel Rosiar* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Magdaléna Mišinová* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Viktor Fukala* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Karel Chwistek* z Mendelova gymnázia v Opavě a *Jonáš Havelka* z Gymnázia České Budějovice, Jírovcova. Vedoucím týmu byl *Bc. Filip Bialas* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a pedagogickým vedoucím *Danil Koževnikov* z University of Cambridge.

Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v následující tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
4.–18.	Samuel Rosiar	7	7	7	7	7	1	36	G
50.–58.	Václav Janáček	7	1	7	7	7	1	30	S
131.–139.	Karel Chwistek	7	0	4	7	7	0	25	S
181.–205.	Magdaléna Mišinová	7	0	0	7	7	1	22	B
272.–293.	Viktor Fukala	7	2	0	7	0	0	16	B
272.–293.	Jonáš Havelka	0	1	0	7	7	1	16	B
	Celkem	35	11	18	42	35	4	145	

Nejlépe z českého týmu skončil Samuel, kterému se povedlo získat zlatou medaili a 4. místo v celkovém pořadí více než 600 soutěžících. Stříbrné medaile vybojovali Vašek a Karel, přičemž Vaškovi k vytouženému zlatu chyběl pouhý bod. Zbylí tři soutěžící, Magda, Viktor a Jonáš, si vysloužili bronzy, takže se poprvé od roku 2014 povedlo, aby všichni naši účastníci měli medaili. V celkovém neoficiálním pořadí zemí se Česká republika umístila na velmi nadprůměrném 23. místě. Za zmínku stojí také to, že si český tým letos velmi dobře poradil s nejtěžší úlohou prvního dne, úlohou číslo 3, protože s celkovým ziskem 18 bodů za tuto úlohu skončil na 5. místě v pořadí všech zemí.

Pro zajímavost uvádíme i výsledky slovenských soutěžících, se kterými měl český tým společné výběrové soustředění (v pořadí států skončilo Slovensko na 40. místě, sdíleném se Slovinskem):

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
59.–85.	Dávid Pásztor	7	7	0	7	7	1	29	S
140.–161.	Matej Urban	7	2	0	7	7	1	24	S
236.–247.	Lucia Krajčoviechová	7	4	1	6	1	0	19	B
294.–316.	Viktor Csaplár	7	0	1	7	0	0	15	B
294.–316.	Josef Fülöp	7	0	0	7	1	0	15	B
294.–316.	Matej Hanus	7	0	0	7	1	0	15	B
	Celkem	42	13	2	41	17	2	117	

Co se týče ostatních států, tak se na prvních příčkách umístili tradiční favoriti Čína, Rusko a USA. Olympiáda se rovněž vydařila polskému týmu, který skončil v celkovém pořadí zemí šestý se ziskem dvou zlatých, tří stříbrných a jedné bronzové medaile. Kompletní výsledky jsou dostupné na odkazu:

`https://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=2020`

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník. Bod P leží uvnitř $ABCD$. Platí následující rovnosti poměrů:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Dokažte, že se následující tři přímky protínají v jednom bodě: vnitřní osy úhlů $\angle ADP$ a $\angle PCB$ a osa úsečky AB. (*Polsko*)

2. Reálná čísla a, b, c, d splňují $a \geq b \geq c \geq d > 0$ a $a + b + c + d = 1$. Dokažte, že

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

(*Belgie*)

3. Mějme $4n$ oblázků o hmotnostech $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Každý oblázek je obarven jednou z n barev a každou barvou jsou obarveny čtyři oblázky. Ukažte, že můžeme rozdělit oblázky do dvou hromádek tak, aby byly splněny obě následující podmínky:

- Celkové hmotnosti obou hromádek jsou stejné.
- Každá hromádka obsahuje dva oblázky od každé barvy.

(*Maďarsko*)

4. Buď $n > 1$ celé číslo. Na sklonu hory je n^2 stanic lanovky v různých výškách. Každá ze dvou lanovkových společností, A a B, provozuje k lanovek; každá lanovka umožňuje cestovat z jedné ze stanic do některé z vyšších stanic (bez dalších zastávek). k lanovek společnosti A má k různých startovních stanic a k různých cílových stanic, navíc platí, že výše začínající lanovka také končí výše. Stejné podmínky platí i pro B. O dvou stanicích řekneme, že jsou propojené společností, pokud se můžeme dostat z nižší stanice do vyšší pomocí jedné či více lanovek této společnosti (žádné jiné přesuny mezi stanicemi nejsou povoleny).

Určete nejmenší kladné celé číslo k, pro které musí vždy existovat dvojice stanic propojená oběma společnostmi. (*Indie*)

5. Je dán balíček $n > 1$ karet. Na každé kartě je napsáno kladné celé číslo. Balíček má vlastnost, že aritmetický průměr čísel na každé dvojici karet je roven geometrickému průměru čísel nějaké skupiny jedné nebo více karet.

Pro která n musí být na všech kartách stejná čísla? (*Estonsko*)

6. Dokažte, že existuje kladná konstanta c taková, že je následující tvrzení pravdivé:

Uvažme celé číslo $n > 1$ a množinu n bodů v rovině $\mathcal{S}$ takovou, že vzdálenost libovolných dvou různých bodů z $\mathcal{S}$ je alespoň 1. Potom existuje přímka ℓ rozdělující $\mathcal{S}$ tak, že vzdálenost libovolného bodu z $\mathcal{S}$ k ℓ je alespoň $cn^{-1/3}$. (Přímka ℓ rozděluje množinu bodů $\mathcal{S}$, pokud některá úsečka spojující dva body z $\mathcal{S}$ protíná ℓ.)

Poznámka. Řešení, která nahradí výraz $cn^{-1/3}$ slabším odhadem $cn^{-\alpha}$, mohou být odměněna bodovým ziskem závisejícím na hodnotě konstanty $\alpha > 1/3$.

(*Taiwan*)