70. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY (2020/2021)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či odkazy na řešení v našem archivu) najdete ve druhé části textu.

1. *Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je* 105*krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je*
(a) pět;
(b) sedm. (Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.
N2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.
N3. Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.
N4. Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.
N5. Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.
D1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ šesti prvočísel.
D2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ $n \geqq 8$ prvočísel.
D3. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.
D4. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$.

2. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Uvědomte si, jak se dokazuje školní poznatek, že osy stran libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě.
N2. Dokážete užitím poznatku o osách stran z úlohy N1 odvodit jiný školní poznatek, že také výšky libovolného trojúhelníku ABC se (jako přímky) protínají v jednom bodě?
N3. Uvědomte si následující ekvivalentní formulaci tvrzení o existenci průsečíku výšek libovolného trojúhelníku ABC: Jestliže pro nějaký bod H roviny trojúhelníku ABC platí $HB \perp AC$ a $HC \perp AB$, pak buď $H = A$, nebo $HA \perp BC$.
D1. Dokažte implikaci z úlohy N3 metodou obvodových úhlů, alespoň pro případ ostroúhlého trojúhelníku ABC.

D2. V trojúhelníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nechť S je takový bod osy úhlu BAC, pro který platí $|SB| = |SC|$. Dokažte, že bod S leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

D3. V trojúhelníku ABC se středem I kružnice vepsané platí $|AB| < |AC|$. Nechť D je bod strany AC takový, že $|AB| = |AD|$. Dokažte, že body B, C, D, I leží na jedné kružnici.

3. *Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách budou a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla.

N1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

N2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

N3. Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

N4. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

D1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$.

D2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$, abc.

D3. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

4. *Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho superdělitelem.*

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2 020. (Michal Rolínek)

Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že prvočinitelem čísla n nazýváme každé prvočíslo, které číslo n dělí.

N1. Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

N2. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

N3. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

D1. Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2 020.

D2. Které z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdělitelem největšího počtu čísel?

D3. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

D4. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

5. *V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB. Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí*

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Seznamte se s Apolloniovými kružnicemi a jejich konstrukcemi. Jsou to množiny bodů významné vlastnosti, která je v následujícím tvrzení určena parametrem λ a body P a Q: Mějme dáno kladné reálné číslo $\lambda \neq 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Pak platí, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je jistá kružnice. Tato (Apolloniova) kružnice je kružnice nad průměrem MN, kde M a N jsou ty dva body přímky PQ, pro které rovnice (1) po dosazení $X = M$, resp. $X = N$ přejde v platnou rovnost.

N2. Mějme dáno reálné číslo $\lambda > 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Dokažte, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

je vnitřek kruhu omezeného Apolloniovou kružnicí, která je určena rovnicí (1) z úlohy N1.

D1. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BC takové, že velikosti výšek v_b, v_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici.

D2. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BC takové, že velikosti těžnic t_b, t_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici.

D3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Najděte množinu všech bodů X této roviny, které neleží na přímce S_1S_2 a mají tu vlastnost, že úsečky S_1X, S_2X protínají po řadě kružnice k_1, k_2 v bodech, jejichž vzdálenosti od přímky S_1S_2 jsou stejné.

D4. V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

6. *Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?*

(Martin Melicher)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách pracujeme s pojmy „žárovka“ a „přepínač“ ve významu ze soutěžní úlohy.

N1. Určete počet možných stavů rozsvícení žárovek 1, 2, 3 a 4, které lze dosáhnout užitím přepínačů $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ a $\{3, 4\}$ (např. přepínač $\{3, 4\}$ vždy přepne právě žárovky 3 a 4).

N2. Dokažte, že pokud máme n přepínačů, kde n je přirozené číslo, tak postupným přepínáním můžeme dosáhnout nejvýše 2^n různých stavů rozsvícení (včetně původního).

N3. Dokažte, že pokud by v soutěžní úloze byl cíl pozměněn na možnost rozsvítit každou trojici žárovek, tak při jeho splnění by bylo možné rozsvítit každou jednotlivou žárovku.

N4. Kolik má daná n prvková množina těch podmnožin, které mají sudý počet prvků?

D1. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $2k$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 3, 34\rangle$.

D2. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $(2k-1)$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 35\rangle$.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o odkazy na náš archiv.

1. *Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je* 105*krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je*
(a) pět;
(b) sedm. (Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel. [Řešení neexistuje. Součin vyhovujících tří prvočísel je násobek čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, takže tato prvočísla musí být 3, 5 a 7. Přitom však $3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 105 \cdot (3 + 5 + 7)$.]

N2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel. [Řešení neexistuje. Podobně jako v N1 tři z prvočísel musí být 3, 5, 7 a pro čtvrté prvočíslo p má platit rovnice $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p = 105 \cdot (3 + 5 + 4 + p)$, kterou zjevně žádné prvočíslo p nesplňuje.]

N3. Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu. [Úloha má jediné řešení, trojici 3, 5, 7. Podobně jako v N1 ukažte, že jedno z prvočísel je 7. Pro zbývající dvě, označme je p a q, má platit $7pq = 7(p+q+7)$, což upravíme postupně na $pq = p+q+7$, dále na $p(q-1) = (q-1)+8$ a konečně na $(p-1)(q-1) = 8$. Při označení takovém, že $p \geqq q$ neboli $p-1 \geqq q-1$, máme možnosti $(p-1, q-1) = (8, 1)$ nebo $(p-1, q-1) = (4, 2)$. Jen druhá vede k dvojici prvočísel.]

N4. Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$. [Čtyři řešení (x, y): $(-4, 1)$, $(2, -11)$, $(3, 8)$, $(15, 2)$. Po vynásobení třemi dostaneme rovnici $9xy = 15x + 21y + 3$. Teď už ji můžeme upravit na součinový tvar $(3x-a)(3y-b) = 3a+3b$ s vhodnými celými čísly a a b, totiž $(3x-7)(3y-5) = 38$. Zbývá rozebrat všechny možnosti rozkladu čísla 38 na součin dvou celých čísel.]

N5. Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x+y+z+2$. [Až na pořadí tři řešení: $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$. Je-li nějaké z čísel x, y, z rovno 1, například x, dostaneme rovnici $yz = y + z + 3$ s řešeními $(2, 5)$ a $(3, 3)$ (podle postupu z N4). Je-li naopak $\min(x, y, z) \geqq 2$ a například $z = \max(x, y, z)$, platí $x + y + z + 2 \leqq 3z + 2$ a současně $xyz \geqq 4z$. Odtud plyne $4z \leqq 3z + 2$ neboli $z \leqq 2$, takže je tedy nutně $x = y = z = 2$, a to je skutečně řešení.]

D1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ šesti prvočísel. [Řešení neexistuje. Podobně jako v N1 usoudíme, že z šesti prvočísel tři jsou 3, 5 a 7, ostatní, které označíme x, y a z, splňují rovnici $xyz = x + y + z + 15$. Je-li některé z prvočísel x, y, z rovno 2, postupem z řešení N4 zjistíme, že rovnice nemá prvočíselné řešení. V opačném případě, kdy $\min(x, y, z) \geqq 3$ a například $z = \max(x, y, z)$, máme $9z \leqq xyz = x + y + z + 15 \leqq 3z + 15$ neboli $z \leqq 2{,}5$, a to je spor.]

D2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ $n \geqq 8$ prvočísel. [Řešení neexistuje pro žádné $n \geqq 8$. Podobně jako v N1 jsou tři prvočísla 3, 5 a 7, zbývající označme $p_1, \ldots, p_k$, kde $k = n - 3$, tedy $k \geqq 5$. Platí $p_1 \cdots p_k = p_1 + \cdots + p_k + 15$. Je-li například $p_1 = \max(p_1, \ldots, p_k)$, pak $2^{k-1} p_1 \leqq p_1 \cdots p_k = p_1 + \ldots + p_k + 15 \leqq k \cdot p_1 + 15$, tedy $p_1(2^{k-1} - k) \leqq 15$. Indukcí se však snadno ukáže, že pro každé $k \geqq 5$ platí $2^{k-1} - k \geqq 11$, odkud $p_1(2^{k-1} - k) \geqq 2 \cdot 11 = 22$, což odporuje dříve odvozené nerovnosti.]

D3. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$. [Jediné řešení $x = y = z = 3$. Nechť nejprve některé z prvočísel x, y a z je rovno 2, např. z. Pak platí $x^2+y^2=x+y+16$. Snadno ověříme, že nemůže být ani $x=2$, a tedy ani $y=2$, a proto $\min(x,y)\geqq 3$. Tehdy $3x+3y\leqq x^2+y^2=x+y+16$, takže takže $x+y\leqq 8$, tudíž stačí otestovat dvojice (x,y) rovné $(3,3)$ a $(5,3)$, které však nevedou k řešení. Přejdeme k druhému případu, kdy $\min(x,y,z)\geqq 3$. Tehdy $3x+3y+3z\leqq x^2+y^2+z^2=x+y+z+18$, takže $x+y+z\leqq 9$, tedy nutně $x=y=z=3$, což je skutečně řešení úlohy.]

D4. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $xyz=xy+yz+zx+x+y+z+35$. [Jediné řešení $x=y=z=5$. Jestliže je nějaké z prvočísel rovno 2 nebo 3, tak dosazením dostaneme rovnice podobné jako v N4, o kterých se stejným postupem přesvědčíme, že nemají žádná prvočíselná řešení. Předpokládejme proto dále, že $x\geqq y\geqq z\geqq 5$. Potom

$$5xy\leqq xyz=xy+yz+zx+x+y+z+35\leqq 3xy+3x+35,$$

odkud $x(2y-3)\leqq 35$. Zároveň však z $x\geqq 5$ a $2y-3\geqq 2\cdot 5-3=7$ plyne opačná nerovnost $x(2y-3)\geqq 35$, takže nutně $x=y=5$, a proto rovněž $z=5$, tedy jediné možné řešení je $x=y=z=5$.]

2. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD|=|CD|$ a $|AE|=|BE|$. Bod F je takový bod, že $FD\parallel AB$ a $FE\parallel AC$. Dokažte, že $|FB|=|FC|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvědomte si, jak se dokazuje školní poznatek, že osy stran libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme O průsečík os stran AB a AC. Podle vlastnosti os úseček nutně platí $|OA|=|OB|$ a $|OA|=|OC|$, takže $|OB|=|OC|$, což naopak znamená, že bod O leží na ose strany BC.]

N2. Dokážete užitím poznatku o osách stran z úlohy N1 odvodit jiný školní poznatek, že také výšky libovolného trojúhelníku ABC se (jako přímky) protínají v jednom bodě? [Trojúhelník ABC doplňte třikrát na rovnoběžník $ABA'C$, $BCB'A$, resp. $CAC'B$. Pak body A, B, C jsou středy stran trojúhelníku $A'B'C'$. Osy jeho stran se protínají v jednom bodě (podle úlohy N1) a leží na nich výšky původního trojúhelníku ABC.]

N3. Uvědomte si následující ekvivalentní formulaci tvrzení o existenci průsečíku výšek libovolného trojúhelníku ABC: Jestliže pro nějaký bod H roviny trojúhelníku ABC platí $HB\perp AC$ a $HC\perp AB$, pak buď $H=A$, nebo $HA\perp BC$. [Bod H je průsečíkem dvou výšek trojúhelníku ABC a každá z relací $H=A$, $HA\perp BC$ znamená, že bod H leží i na třetí výšce z vrcholu A.]

D1. Dokažte implikaci z úlohy N3 metodou obvodových úhlů, alespoň pro případ ostroúhlého trojúhelníku ABC. [Nechť tedy $HB\perp AC$, $HC\perp AB$. Označme A' průsečík AH a BC, B' průsečík BH a AC, a C' průsečík CH a AB. Čtyřúhelníky $AC'HB'$ a $BC'B'C$ jsou tětivové díky pravým úhlům $\sphericalangle AB'H$, $\sphericalangle HC'A$, $\sphericalangle BC'C$, $\sphericalangle BB'C$. Proto $|\sphericalangle BAA'|=|\sphericalangle C'AH|=|\sphericalangle C'B'H|=|\sphericalangle C'B'B|=|\sphericalangle C'CB|$. Trojúhelníky BAA', BCC' se proto shodují ve dvou vnitřních úhlech, takže se shodují i ve třetím z nich: $|\sphericalangle AA'B|=|\sphericalangle BC'C|=90°$. Odtud už $HA\perp BC$.]

D2. V trojúhelníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nechť S je takový bod osy úhlu BAC, pro který platí $|SB| = |SC|$. Dokažte, že bod S leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Pracovat přímo se zadaným bodem S je obtížné, a tak uvážíme pomocný bod S', kterým je průsečík $S' \neq A$ osy úhlu BAC s kružnicí opsanou. Jak je dobře známo, platí $|S'B| = |S'C|$ (plyne to ze shodnosti obvodových úhlů $S'AB$ a $S'AC$). Díky podmínce $|AB| \neq |AC|$ je společný bod S osy úhlu BAC a osy strany BC jediný, a tak platí $S' = S$.]

D3. V trojúhelníku ABC se středem I kružnice vepsané platí $|AB| < |AC|$. Nechť D je bod strany AC takový, že $|AB| = |AD|$. Dokažte, že body B, C, D, I leží na jedné kružnici. [Polopřímka AI je osa úhlu BAC, a tedy i osa úhlu BAD, která je díky podmínce $|AB| = |AD|$ zároveň i osou úsečky BD. Bod I je tedy pro trojúhelník BCD takovým bodem osy úhlu BCD, pro který platí $|IB| = |ID|$. Protože navíc $|CB| \neq |CD|$ (neboť $|CD| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| < |CB|$ podle trojúhelníkové nerovnosti), je možné užít výsledek úlohy D2, podle kterého leží bod I kružnici opsané trojúhelníku BCD. *Jiné řešení*: Stačí ukázat, že oba úhly BIC a BDC mají velikost $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, kde jako obvykle $\alpha = |\sphericalangle BAC|$.]

3. *Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách budou a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla.

N1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$. [Jde vždy o čtyři různá čísla. Jistě lze předpokládat, že $0 < a < b < c$. Pak ovšem $a+b < a+c < b+c < a+b+c$.]

N2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc. [Tři. Jistě lze předpokládat, že $0 < a < b < c$. Pak ovšem $ab < ac < bc$, takže aspoň tři různé hodnoty existují vždy. Právě tři různé hodnoty to budou, právě když číslo abc bude rovno jednomu z čísel ab, ac, bc, tj. právě když bude $1 \in \{a, b, c\}$.]

N3. Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1? [Tři a možný počet to je i v případě $a \neq 1 \neq b$. S ohledem na symetrii zadání v proměnných a a b můžeme předpokládat, že $a < b$. Protože $b < b+1$, jsou a, b, $b+1$ tři různé hodnoty. Aby byly právě tři v celé pětici, musí platit $a+1 = b$ a v případě $a \neq 1 \neq b$ ještě musí být $ab = b+1$. Oběma rovnostem vyhovují čísla $a = \sqrt{2}$ a $b = \sqrt{2}+1$, která jsou různá od 1 a pro která jsou v pětici skutečně tři různé hodnoty.]

N4. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$. [Tři. Protože $ab \neq ac$ a také $a+b \neq a+c$, tak máme aspoň 2 různé hodnoty. Připusťme, že máme právě 2 různé hodnoty v celé čtveřici. Pak máme dvě možnosti: buď $ab = a+b$ a $ac = a+c$, nebo $ab = a+c$ a $ac = a+b$. V prvním případě po odečtení obou rovností dostaneme $(a-1)(b-c) = 0$, odkud $a = 1$, a to je spor s $ab = a+b$. V druhém případě po podobném odečtením dostaneme $(a+1)(b-c) = 0$, a to rovněž spor. Proto vždy máme aspoň 3 různé hodnoty, a tento počet nepřekročíme, bude-li platit $ab = a+b$, což splňuje například trojice $(a, b, c) = (3, \frac{3}{2}, 1)$. Dodejme, že postup jsme mohli zjednodušit využitím symetrie zadání v proměnných b a c, díky které můžeme předpokládat, že $b < c$. Tehdy platí $ab < ac$ a $a + b < a + c$, takže stačí rozebrat jen první ze dvou výše rozlišených případů.]

D1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$. [Dvě. Úloha se nezmění, když trojici (a, b, c) zaměníme libovolnou z trojic (b, c, a) a (c, a, b). Proto můžeme předpokládat, že platí $a = \max\{a, b, c\}$. Pak $2a > b + c$ neboli $c + 2a > b + 2c$. Tím pádem v naší trojici máme aspoň dvě různé hodnoty. Pro nalezení trojice s právě dvěma různými hodnotami položme například $c + 2a = a + 2b$. To dává $a = 2b - c$. Tak například pro $c = 1$, $b = 2$ vyjde $a = 3$. Tehdy $(a + 2b, b + 2c, c + 2a) = (7, 4, 7)$.]

D2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b$, $b + c$, $c + a$, $ab + 1$, $bc + 1$, $ca + 1$, abc. [Čtyři. Díky symetrii můžeme předpokládat, že $a > b > c$. Potom $a + b > a + c > b + c$ a $ab + 1 > ac + 1 > bc + 1$, takže v zadané sedmici jsou vždy aspoň tři různé hodnoty. Kdyby byly právě tři, tak by nutně platilo $a + b = ab + 1$, $a + c = ac + 1$ a $b + c = bc + 1$. To upravíme na $(a - 1)(b - 1) = 0$, $(a - 1)(c - 1) = 0$ a $(b - 1)(c - 1) = 0$. Nutně se tedy dvě z čísel a, b, c rovnají 1, a to je spor. V naší sedmici tedy máme vždy aspoň 4 různé hodnoty, a tento počet nepřekročíme, když například zvolíme $a = 1$ a budeme požadovat, aby platilo $bc = b + c$, což kupříkladu splňuje dvojice $(b, c) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$.]

D3. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}, \qquad \frac{a + b + c}{3}, \qquad \sqrt[3]{abc}, \qquad \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

[Čtyři. Jednotlivá čísla jsou různé druhy průměrů sestavené pro tutéž trojici čísel a, b, c. Označme zleva doprava jejich hodnoty K, A, G, H podle jejich názvů *kvadratický*, resp. *aritmetický*, resp. *geometrický*, resp. *harmonický* průměr. Jak je známo, mezi těmito průměry pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí nerovnosti $K \geqq A \geqq G \geqq H$, pričemž všechny nerovnosti jsou ostré s výjimkou případu, kdy platí $a = b = c$. (Důkazy těchto nerovností lze nalézt v brožuře *A. Kufner: Nerovnosti a odhady*, dostupné na https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877.)]

4. *Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho superdělitelem.*

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2 020.

(Michal Rolínek)

Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že prvočinitelem čísla n nazýváme každé prvočíslo, které číslo n dělí.

N1. Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n. [Je-li d dělitel čísla n, je jeho dělitelem i číslo $\frac{n}{d}$. Nejmenší dva dělitelé n jsou 1 a p, kterým odpovídají dva jeho největší dělitelé $\frac{n}{1}$ a $\frac{n}{p}$.]

N2. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2. [Jedině číslo 4. Každé hledané číslo n je nutně sudé, a tak je číslo 2 jeho nejmenší prvočinitel. Podle výsledku N1 tedy platí $2 = \frac{n}{2}$, a proto $n = 4$.]

N3. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7. [14, 21, 35 a 49. Každé hledané n je dělitelné sedmi a podle výsledku N1 má platit $7 = \frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel n, takže $p \leqq 7$ neboli $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.]

D1. Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2 020. [1 515 a 1 919. Je-li p nejmenší prvočinitel čísla n, pak $n = dp$, kde d je superdělitel n. Má platit $dp + d = 2020$ neboli $d(p+1) = 2020$, takže zbývá probrat všechny dělitele d čísla 2 020 s prvočíselným rozkladem $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pro $d = 1$ vychází $p = 2019$, což není prvočíslo. Kdyby bylo $d > 1$ sudé, bylo by sudé i číslo n, a tak by by bylo $p = 2$, a tedy $d(2+1) = 2020$, což není možné. Zbývají proto možnosti $d \in \{5, 101, 505\}$. Postupným dosazením do $d(p+1) = 2020$ zjistíme, že řešení dává pouze hodnota $d = 101$, které odpovídá $p = 19$, a hodnota $d = 505$, pro kterou vychází $p = 3$. (V obou případech je skutečně nalezené p nejmenším prvočinitelem součinu $n = dp$.)]

D2. Které z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdělitelem největšího počtu čísel? [Číslo 19. Hledáme to číslo $n \in \{2, 3, \ldots, 20\}$, pro které existuje co nejvíce prvočísel p takových, že nejmenší prvočinitel čísla np je právě p. Protože $n > 1$, musí pro každé prvočíslo p s uvedenou vlastností platit $p \leqq n$, a tedy i $p \leqq 20$, takže takových prvočísel nemůže být více, než je všech prvočísel do 20, kterých je 8. Aby jich bylo právě 8, musel by i součin $19n$ mít nejmenšího prvočinitele 19, což z uvažovaných čísel n splňuje jedině $n = 19$. Toto číslo je skutečně superdělitelem osmi čísel $19 \cdot 2$, $19 \cdot 3$, $19 \cdot 5$,..., $19 \cdot 19$.]

D3. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 2 017. Číslo 1 je superdělitelem každého prvočísla. Nejbližší prvočíslo k číslu 2 020 je 2017. Výpočtem superdělitelů čísel $2\,018, 2\,019, \ldots, 2\,023$ zjistíme, že žádný z nich nepatří mezi čísla ze zadání.]

D4. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 1 849. Největším číslem n s daným superdělitelem $d > 1$ je číslo $n = dp$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla d. Odtud plyne, že pokud $1 < d \leqq 43$, pro každé číslo n se superdělitelem d platí $n \leqq d^2 \leqq 43^2 = 1\,849$, přitom číslo 1 849 má za superdělitele prvočíslo 43. Dále největší číslo se superdělitelem 44 je rovno $44 \cdot 2 = 88$, největší číslo se superdělitelem 45 je rovno $45 \cdot 3 = 135$.]

5. *V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB. Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí*

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Seznamte se s Apolloniovými kružnicemi a jejich konstrukcemi. Jsou to množiny bodů významné vlastnosti, která je v následujícím tvrzení určena parametrem λ

a body P a Q: Mějme dáno kladné reálné číslo $\lambda \neq 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Pak platí, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je jistá kružnice. Tato (Apolloniova) kružnice je kružnice nad průměrem MN, kde M a N jsou ty dva body přímky PQ, pro které rovnice (1) po dosazení $X = M$, resp. $X = N$ přejde v platnou rovnost. [Viz část I kapitoly 5 brožury *S. Horák: Kružnice*, dostupné na `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589`. Jiný podrobný výklad najdete v návodných úlohách k úloze 63–A–I–6.]

N2. Mějme dáno reálné číslo $\lambda > 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Dokažte, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

je vnitřek kruhu omezeného Apolloniovou kružnicí, která je určena rovnicí (1) z úlohy N1. [Uvažte dvě Apolloniovy kružnice

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_1 > 1 \quad \text{a} \quad \frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_2 > 1.$$

První z nich je kružnice nad průměrem M_1N_1, druhá je kružnice nad průměrem M_2N_2, kde M_1N_1 a M_2N_2 jsou jisté úsečky na přímce PQ. Tvrzení úlohy N2 bude dokázáno, když vysvětlíme, proč v případě $\lambda_1 < \lambda_2$ leží body M_2, N_2 uvnitř úsečky M_1N_1.]

D1. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BCtakové, že velikosti výšek v_b, v_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici. [Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $2S = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, a proto $b : c = v_c : v_b = 2 : 1$. Vyhovující body A tedy leží na Apolloniově kružnici $|CX|/|BX| = 2$.]

D2. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BC takové, že velikosti těžnic t_b, t_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici. [Pro těžiště G trojúhelníku ABC platí $|BG| = \frac{2}{3}t_b$ a $|CG| = \frac{2}{3}t_c$, takže $|BG| : |CG| = 1 : 2$. Všechny body G tedy leží na jedné Apolloniově kružnici, proto všechny body A leží na jejím obraze ve stejnolehlosti se středem ve středu úsečky BC, která má koeficient 3.]

D3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Najděte množinu všech bodů X této roviny, které neleží na přímce S_1S_2 a mají tu vlastnost, že úsečky S_1X, S_2X protínají po řadě kružnice k_1, k_2 v bodech, jejichž vzdálenosti od přímky S_1S_2 jsou stejné. [63–A–II–2]

D4. V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. [63–A–I–6]

6. *Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?*

(Martin Melicher)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách pracujeme s pojmy „žárovka" a „přepínač" ve významu ze soutěžní úlohy.

N1. Určete počet možných stavů rozsvícení žárovek 1, 2, 3 a 4, které lze dosáhnout užitím přepínačů $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ a $\{3,4\}$ (např. přepínač $\{3,4\}$ vždy přepne právě žárovky 3 a 4). [Čtyři stavy (včetně toho původního). Uvědomme si, že pořadí stlačování přepínačů v dané sérii nemá vliv na celkový výsledek. Rovněž nemá smysl žádný přepínač užít v jedné sérii vícekrát. Stačí tedy najít výsledný stav pro každou z 2^3 podmnožin dané množiny 3 přepínačů, které můžeme stlačit, a pak spočítat, kolik těchto stavů je různých. Výhodné je přitom výsledné stavy určovat takto: $\{1,2,3\}+\{3,4\}\sim\{1,2,4\}$. Z toho příkladu vidíme, že přepínač $\{1,2,4\}$ je možné v zadání úlohy vynechat.]

N2. Dokažte, že pokud máme n přepínačů, kde n je přirozené číslo, tak postupným přepínáním můžeme dosáhnout nejvýše 2^n různých stavů rozsvícení (včetně původního). [Podle úvahy z řešení N1 platí, že počet dosažitelných stavů nepřevyšuje počet všech podmnožin dané množiny přepínačů.]

N3. Dokažte, že pokud by v soutěžní úloze byl cíl pozměněn na možnost rozsvítit každou trojici žárovek, tak při jeho splnění by bylo možné rozsvítit každou jednotlivou žárovku. [K rozsvícení jediné zvolené žárovky a vybereme tři další žárovky b, c, d a aplikujeme postupně 3 série rozsvícení, a to pro trojice (a,b,c), (a,b,d) a (a,c,d).]

N4. Kolik má daná n prvková množina těch podmnožin, které mají sudý počet prvků? [2^{n-1} podmnožin. Postupujeme obdobně jako při známém důkazu, že počet *všech* podmnožin je 2^n: Prvních $n-1$ prvků můžeme do konstruované podmnožiny buď zařadit, nebo nezařadit, takže máme 2^{n-1} možností. Po této proceduře máme vybrán buď sudý, nebo lichý počet prvků, a tak podle toho k nim nezařadíme, resp. zařadíme poslední n-tý prvek. Takto dostaneme právě 2^{n-1} vyhovujících podmnožin. Zbývá si uvědomit, že popsaným postupem dostaneme *každou* vyhovující podmnožinu.]

D1. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $2k$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 3,34\rangle$. [Taková úloha je ekvivalentní se soutěžní úlohou. Nechť dále (a,b) je libovolná dvojice žárovek a c_i značí žárovky různé od a, b, přičemž $c_i\neq c_j$ pro $i\neq j$. Lze-li rozsvítit $2k$-tice $(a,c_1,\dots,c_{2k-1})$ a $(b,c_1,\dots,c_{2k-1})$, tak lze rozsvítit i dvojici (a,b), a tedy i libovolnou čtveřici (po dvou dvojicích). Naopak, lze-li rozsvítit čtveřice (a,c_1,c_2,c_3) a (b,c_1,c_2,c_3), lze rozsvítit i dvojici (a,b), takže pak lze rozsvítit i každou $2k$-tici (po k dvojicích).]

D2. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $(2k-1)$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 35\rangle$. [70 přepínačů. Podobně jako v řešení D1 úvahou o dvou $(2k-1)$-ticích $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $(b, c_1, \dots, c_{2k-2})$ zjistíme, že lze rozsvítit každou dvojici (a, b). Nyní úvahou o jedné $(2k-1)$-tici $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $k-1$ dvojicích (c_1, c_2),..., (c_{2k-3}, c_{2k-2}) zjistíme, že lze rozsvítit libovolnou žárovku a, a tedy i každou z 2^{70} množin žárovek, takže podle výsledku úlohy N2 potřebujeme aspoň 70 přepínačů. 70 přepínačů ale stačí – jeden přepínač na každou žárovku.]