71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Označme n celkový počet žáků na zahradě. Podle prvního rozdělení žáků (do trojic) máme $n = 3k + 1$ pro vhodné celé číslo k. Dále podle rozdělení $3k$ žáků do čtveřic máme $3k = 4l + 1$ pro vhodné celé číslo l. Konečně podle rozdělení $4l$ žáků do pětic máme $4l = 5m + 1$ pro vhodné celé číslo m. Původní číslo n tak má trojí vyjádření

$$n = 3k + 1 = 4l + 2 = 5m + 3.$$

Naším úkolem je ukázat, že číslo $5m$ dává při dělení šesti zbytek 1, což podle rovnosti $n = 5m + 3$ nastane, právě když číslo n bude při dělení šesti dávat zbytek 4. Dokážeme to tak, že vyloučíme ostatní možné zbytky 0, 1, 2, 3 a 5 při dělení čísla n číslem 6. To je snadné: zbytky 0, 2 a 3 vylučuje rovnost $n = 3k + 1$, zbytky 1 a 5 dávají jen některá lichá čísla, podle rovnosti $n = 4l + 2$ je však číslo n sudé. Řešení je hotovo.

Jiné řešení. Označme n celkový počet žáků na zahradě. Podle zadání víme, že když se žáci rozdělili do trojic, tak jeden přebyl. Matematicky to znamená, že

$$3 \mid n - 1. \tag{1}$$

Dále víme, že po rozdělení zbylých $n - 1$ žáků do čtveřic opět jeden přebyl, takže

$$4 \mid (n - 1) - 1 = n - 2. \tag{2}$$

Podobně dostaneme a zapíšeme i třetí zadanou podmínku

$$5 \mid n - 3. \tag{3}$$

Naším cílem je dokázat, že za podmínek (1)–(3) platí

$$6 \mid n - 4. \tag{4}$$

K tomu stačí dát dohromady výsledky dvou pozorování:

- Protože podle (1) je číslo $n - 1$ dělitelné třemi, je dělitelné třemi i číslo $(n - 1) - 3 = n - 4$.
- Protože podle (2) je číslo $n - 2$ dělitelné čtyřmi, je sudé, tak i číslo $(n - 2) - 2 = n - 4$ je rovněž sudé.

Vidíme, že číslo $n - 4$ je dělitelné dvěma i třemi, a tak je dělitelné šesti, tj. platí (4), jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Všimněme si, že v našem řešení jsme nevyužili podmínku (3). Ani dělitelnost čtyřmi z podmínky (2) jsme nevyužili naplno – vystačili jsme s jejím důsledkem $2 \mid n-2$. Pro zajímavost teď odvoďme všechny možné počty žáků na zahradě, tedy ta přirozená čísla n, která splňují podmínky (1)–(3).

Podmínka (1) znamená, že $n = 3k+1$ pro některé celé číslo k. Dosazením do podmínky (2) dostaneme $4 \mid 3k-1$, což díky $4 \mid 4k$ nastane právě tehdy, když $4 \mid 4k-(3k-1) = k+1$. To znamená, že $k = 4l+3$ pro některé celé číslo l, takže

$$n = 3k+1 = 3(4l+3)+1 = 12l+10.$$

Konečně dosazením do podmínky (3) obdržíme $5 \mid 12l+7$, což díky $5 \mid 10l+5$ zjednodušíme na $5 \mid (12l+7)-(10l+5) = 2(l+1)$. Jelikož čísla 2 a 5 jsou nesoudělná, po dalším zjednodušení máme $5 \mid l+1$, tudíž $l = 5m+4$ pro nějaké celé číslo m. Vychází tak

$$n = 12l+10 = 12(5m+4)+10 = 60m+58.$$

I když jsme postupovali tak, že zkouška nalezených n není nutná, přesvědčeme se, že číslo $n = 60m+58$ splňuje podmínky (1)–(3) pro každé celé m. Plyne to z vyjádření

$$n-1 = 3(20m+19), \quad n-2 = 4(15m+14), \quad n-3 = 5(12m+11).$$

Dodejme, že aby bylo číslo $n = 60m+58$ kladné, číslo m musí být nezáporné.

Došli jsme k závěru, že možné počty žáků na zahradě jsou čísla $60m+58$, kde $m \in \{0,1,2,\dots\}$. Nejrealističtější je asi ten nejmenší možný počet 58.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka+lb$ (speciálně například $n \mid a+b$ a $n \mid a-b$). [Podmínky $n \mid a$ a $n \mid b$ znamenají existenci celých čísel a', b' takových, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ak+bl = a'nk+b'nl = n(a'k+b'l)$, což znamená, že $n \mid ka+lb$.]

N2. Pro celá čísla n, a, b, kde a, b jsou nesoudělná, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $ab \mid n$. [Pro libovolné prvočíslo p označme a_p, b_p, n_p exponenty mocnin prvočísla p v rozkladech čísel a, b, n na prvočinitele. Naším cílem je dokázat nerovnost $a_p + b_p \leqq n_p$. To je snadné: díky nesoudělnosti a, b je v součtu $a_p + b_p$ aspoň jeden sčítanec roven nule a přitom podle zadání platí $a_p \leqq n_p$ i $b_p \leqq n_p$.]

N3. Máme vyjít několik schodů. Kdybychom je brali po dvou, jeden zůstane. Kdybychom je brali po třech, také zůstane jeden. Dokažte, že rovněž tak to dopadne, když schody budeme brát po šesti. [Nechť n je počet schodů. Podle první podmínky platí $2 \mid n-1$, podle druhé $3 \mid n-1$. Jelikož 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, podle výsledku úlohy N2 platí rovněž $6 \mid n-1$, a to je dokazované tvrzení.]

Nechť v dalším textu $\mathrm{nsn}(\dots)$ značí nejmenší společný násobek skupiny čísel zapsaných mezi závorkami.

D1. Pro celá čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $\mathrm{nsn}(a,b) \mid n$. [Postupujeme podobně jako v úloze N2: Jsou-li a_p, b_p, n_p příslušné exponenty, pak z nerovností $a_p \leqq n_p$ a $b_p \leqq n_p$ máme $\max(a_p, b_p) \leqq n_p$, kde ovšem $\max(a_p, b_p)$ je zřejmě exponent prvočísla p v rozkladu čísla $\mathrm{nsn}(a,b)$.]

D2. Pro celá čísla $n, a_1, \dots, a_k$ platí $a_i \mid n$ pro každé $i \in \{1,2,\dots,k\}$, Dokažte, že pak také platí $\mathrm{nsn}(a_1,\dots,a_k) \mid n$. [Postupujte analogicky jako při řešení úlohy D1.]

D3. Je dáno přirozené číslo $m \geqq 5$ takové, že číslo $m+1$ je dělitelné aspoň dvěma prvočísly. Dokažte, že závěr soutěžní úlohy platí všeobecněji: Postupně pro $i = 3,4,\dots,m$ žáky rozdělujeme do i-tic, vždy jeden žák zbude a toho z další hry vyloučíme. Pak i při následném rozdělování na $(m+1)$-tice jeden žák zbude. (Původní úlohu dostaneme volbou $m = 5$). [Nechť n je počet žáků. Podmínku, co se stane v i-tém kroku, zapíšeme jako $i \mid n - i + 2$, což je ekvivalentní s $i \mid n + 2$. Podle výsledku úlohy D2 to znamená, že $\mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) \mid n + 2$. Jelikož je číslo $m + 1$ dělitelné aspoň dvěma prvočísly, lze ho zapsat ve tvaru $m + 1 = a \cdot b$ s dvěma nesoudělnými čísly $a \leqq m$ a $b \leqq m$. Každé z čísel a, b určitě dělí číslo $\mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m)$ (i když je $a = 2$ nebo $b = 2$), tedy i číslo $n + 2$. To (podle výsledku N2) znamená, že také platí $m + 1 = ab \mid n + 2$.]

D4. Dokažte, že pokud bychom v úloze D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bylo dělitelné jen jedním prvočíslem, tak závěr obecně neplatí: Existuje takové n, že prvních m rozdělení proběhne se zadaným výsledkem, avšak při následném rozdělování žáků do $(m + 1)$-tic se nestane, že by zbyl jeden žák. [Využijeme poznatků z řešení úlohy D3. Vyberme $n = \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) - 2$. Protože zřejmě $n > m - 2$, takže $n + 2 - m > 0$, a zároveň pro každé $i = 3, 4, \ldots, m$ platí $i \mid \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m) = n + 2$, postupná rozdělení do i-tic pro taková i požadovaným způsobem proběhne a rozdělování do $(m+1)$-tic se poté bude ještě účastnit $n + 2 - m$ žáků. Je-li ovšem $m + 1 = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geqq 1$ je celé číslo, pak číslo $n + 2 = \mathrm{nsn}(3, 4, \ldots, m)$ už nebude dělitelné číslem $m + 1$, protože v rozkladu takového čísla $n + 2$ se prvočíslo p vyskytuje pouze v mocnině p^{k-1}. Takže rozdělení do $(m + 1)$-tic ve výsledku s jedním zbylým žákem neproběhne.]

D5. Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ dělitelná číslem d. [66–C–I–2]

2. *Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:*

(i) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 2*, je* 80*.*
(ii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 3*, je* 90*.*
(iii) *Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici* 5*, je* 60*.*

(Jaroslav Zhouf)

Řešení. Uvažujme libovolnou vyhovující čtveřici. Všimněme si předně, že žádný ze tří popsaných součtů nemůžeme dostat jako „součet“ jediného čísla, neboť číslo 80 neobsahuje číslici 2, číslo 90 neobsahuje číslici 3 a číslo 60 neobsahuje číslici 5.

Podle zadání mají čísla obsahující číslici 5 součet 60. Už jsme zdůvodnili, že je to součet aspoň dvou čísel. Více než dvě čísla to však být nemohou, protože

- žádné z nich nemůže mít číslici 5 na místě desítek, jinak bychom měli součet aspoň $50 + 15$, což je více než 60;
- kdyby naopak měla všechna sčítaná čísla číslici 5 na místě jednotek, jejich součet by musel být aspoň $15 + 25 + 35$, což je také více než 60.

Tím pádem součet 60 vznikl jako součet právě dvou čísel, přičemž obě mají číslici 5 na místě jednotek. Tato dvě čísla tedy zřejmě jsou buď 15 a 45, nebo 25 a 35. Ukážeme, že první možnost je vyloučena.

Připusťme tedy, že v naší čtveřici jsou (první dvě) čísla 15 a 45. Žádné z nich neobsahuje číslici 2, tudíž požadovaný součet 80 mají právě zbývající dvě čísla. Podobně kvůli číslici 3 usoudíme, že součet dvou zbývajících čísel musí být ne 80, ale 90. Získaný spor ukazuje, že ve čtveřici jsou nutně druhá dvě čísla 25 a 35.

Všimněme si nyní, že kvůli číslům 25 a 35 naše součty 80 ani 90 nejsou součty právě dvou čísel, protože druhé sčítance by musely být rovny $80 - 25$, resp. $90 - 35$, čili v obou případech 55. Pak by však neseděl součet 60 všech čísel s číslicí 5 (který je, jak už víme, dosažen jako $25 + 35$).

Tím pádem je součet 80 stejně jako součet 90 nutně součtem tří čísel z naší čtveřice – čtyři čísla to nemohou být kvůli zastoupeným číslům 25 a 35. Zbylá dvě čísla obsahují tedy obě jak číslici 2, tak i číslici 3. Nutně proto jde o čísla 23 a 32, takže naše čtveřice musí být složena z čísel 25, 35, 23, 32. Je ovšem třeba ještě ověřit, že taková čtveřice má požadované součty 80 a 90 (o součtu $60 = 25 + 35$ to už víme). Skutečně, platí $25 + 23 + 32 = 80$ a $35 + 23 + 32 = 90$.

Závěr. Jediná vyhovující čtveřice je tvořena čísly 25, 35, 23, 32.

Poznámka. Obměnou našeho postupu řešení ukážeme, že čtveřice vyhovující zadání úlohy zůstane jediná, i když nebudeme vyžadovat, aby byla tvořena navzájem různými čísly.

Předpoklad o různosti čísel jsme poprvé využili při řešení otázky, zda číslo 60 může může být vyjádřeno jako součet tří nebo čtyř čísel s číslicí 5 na místě jednotek. To se snadno vyloučí i v případě, kdy čísla nejsou nutně různá. Skutečně, součet tří čísel končících číslicí 5 rovněž končí číslicí 5, součet čtyř takových čísel je roven 60, jen když jde o čísla 15, 15, 15, 15. Taková čtveřice však zadání nevyhovuje.

Podruhé (a naposledy) jsme předpoklad o různosti čísel využili při důkazu tvrzení, že čísla 25, 35 musí být doplněna o čísla 23, 32. V obecnější situaci je nutné vyloučit, že doplňující čísla jsou 23, 23 nebo 32, 32. To je však zřejmé a celá obměna postupu je hotova.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na tabuli jsou napsána tři dvojmístná (ne nutně různá) čísla taková, že součet těch s číslicí 1 je 36 a součet těch s číslicí 5 je 40. Určete tato tři čísla. [15, 21, 25. Zaměřme se na zadaný součet 40. Protože toto číslo nemá číslici 5, nemůže to být ani „součet“ jednoho, ani všech tří čísel napsaných čísel, která by musela končit číslicí 5, neboť jsou menší než 50; musí jít tedy o součet dvou čísel končících číslicí 5, tedy nutně čísel 15 a 25. Zbylé třetí číslo musí s číslem 15 dávat zadaný součet 36, takže jde o číslo 21 (které skutečně obsahuje číslici 1).]

N2. Na tabuli jsou napsána navzájem různá dvojmístná čísla taková, že každé z nich obsahuje číslici 5 a součet všech je 75. Určete tato čísla (najděte všechny možnosti). [Buď jedno číslo 75, nebo dvě čísla 50 a 25, nebo tři čísla 15, 25 a 35. Je-li napsané číslo jedno, tak je to samo číslo 75. Jsou-li napsána čísla dvě, tak číslicí 5 může jen jedno číslo začínat a jen jedno končit, máme tedy $75 = 5\star + \star 5$, což je jedině $50 + 25$. Jsou-li napsána aspoň tři čísla, tak součet všech je aspoň $15 + 25 + 35 = 75$; jsou to proto právě tři čísla, a to 15, 25 a 35.]

D1. Na tabuli je napsáno 18 navzájem různých dvojmístných čísel. Součet těch, které obsahují číslici 1, je 593. Určete všechny možné hodnoty součtu těch čísel, které obsahují číslici 2. [Jediná hodnota je 33. Počet všech dvojmístných čísel s číslicí 1 je roven číslu 18 ze zadání úlohy, jsou to totiž čísla $10, 11, \ldots, 19, 21, 31, \ldots, 91$ a jejich součet je roven právě číslu 593 ze zadání úlohy. Na tabuli jsou tedy všechna tato čísla a žádná jiná. Ta s číslicí 2 jsou právě 12 a 21.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

D3. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. [67–C–I–1]

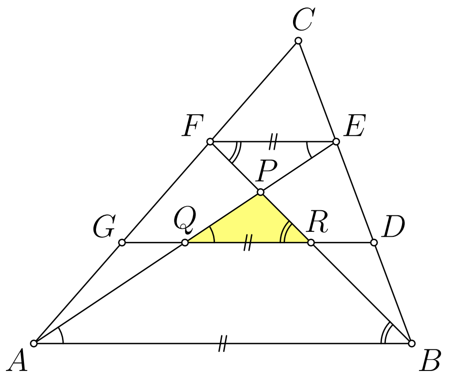
D4. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. [70–B–I–1]

3. *Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF. Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji.* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Vrcholy vymezeného trojúhelníku označme P, Q, R jako na obrázku. Vzdálenost bodu X od přímky YZ budeme značit jako $d(X, YZ)$. Pro výpočty obsahů označíme $c = |AB|$ a $v = d(C, AB)$. Konečně S_{XYZ} bude značit obsah trojúhelníku XYZ.

Trojúhelníky ABC a FEC se společným úhlem u vrcholu C jsou podobné podle věty *sus* s koeficientem podobnosti $|CF|/|CA| = |CE|/|CB|$ rovným $1/3$, takže platí $EF \parallel AB$, $|EF| = |AB|/3 = c/3$ a $d(C, EF) = d(C, AB)/3 = v/3$. Z posledního vztahu plyne, že vzdálenost rovnoběžek AB a EF je rovna $2v/3$.

Podobně z podobnosti trojúhelníků ABC a GDC s koeficientem $|CG|/|CA| = |CD|/|CB| = 2/3$ vyplývá, že $DG \parallel AB$ a $|GD| = 2 \cdot |AB|/3 = 2c/3$. Dokázaná rovnoběžnost tří úseček AB, DG a EF znamená shodnost úhlů, které jsou stejně vyznačeny na obrázku.



Vidíme, že trojúhelníky PAB a PEF jsou podobné podle věty *uu*, a to s koeficientem podobnosti $|EF|/|AB|$ rovným (jak už víme) $1/3$. Tím pádem platí

$$\frac{d(P, EF)}{d(P, AB)} = \frac{1}{3}, \quad \text{přičemž} \quad d(P, EF) + d(P, AB) = d(E, AB) = \frac{2v}{3}.$$

Odtud snadno vychází $d(P, EF) = v/6$ (a také $d(P, AB) = v/2$, což využijeme až v poznámce za řešením).

Všimněme si nyní, že bod G je střed úsečky AF. Jelikož $GQ \parallel EF$, je GQ střední příčka trojúhelníku AEF. Podobně RD je střední příčka trojúhelníku BEF. Z toho dostáváme

$$|QR| = |GD| - |GQ| - |RD| = |GD| - \frac{|EF|}{2} - \frac{|EF|}{2} = |GD| - |EF| = \frac{2c}{3} - \frac{c}{3} = \frac{c}{3} = |EF|.$$

Trojúhelníky PQR a PEF jsou tak shodné podle věty *usu*. Hledaný obsah S_{PQR} je proto roven obsahu S_{PEF}, který už snadno určíme

$$S_{PEF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot d(P, EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{v}{6} = \frac{1}{18} \cdot \frac{cv}{2} = \frac{1}{18} \cdot S_{ABC}.$$

Závěr. Hledaný poměr obsahů trojúhelníků PQR a ABC je pro libovolný výchozí trojúhelník ABC stejný, a sice rovný $1 : 18$.

Poznámka. Užití věty *usu* k důkazu shodnosti trojúhelníků PQR a PEF lze nahradit konstatováním, že $QREF$ je rovnoběžník, neboť jeho protější strany QR a EF jsou rovnoběžné a shodné. Ukažme, že dokonce není nutné trojúhelník PEF vůbec uvažovat. Místo toho lze po výpočtu $|QR| = c/3$ ještě přímo vypočítat $d(P, QR) = v/6$. K tomu stačí využít podobnosti trojúhelníků PAB a PQR s koeficientem $|QR|/|AB|$ rovným $1/3$. Podle ní totiž máme $d(P, QR) = d(P, AB)/3 = v/6$, neboť hodnotu $d(P, AB) = v/2$ jsme už v řešení určili.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známou větu *o střední příčce trojúhelníku*: V trojúhelníku ABC označme M, N po řadě středy stran AB, AC. Pak úsečka MN je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku. [Trojúhelníky ABC a AMN jsou podobné s koeficientem $1/2$ (věta *sus*), takže platí $|MN| = |AB|/2$ a úhly ABC, AMN jsou shodné, odkud plyne $MN \parallel BC$.]

N2. Dokažte známou větu *o střední příčce lichoběžníku*: V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označme M, N po řadě středy ramen BC, AD. Pak úsečka MN je rovnoběžná se základnami AB, CD a její délka je rovna aritmetickému průměru obou jejich délek. [Uvažme střed K střed úhlopříčky AC. Pak MK a NK jsou střední příčky po řadě trojúhelníků ABC a ACD, takže (podle N1) jednak platí $MK \parallel AB \parallel CD \parallel NK$, tudíž bod K leží na úsečce MN rovnoběžné se základnami, jednak platí $|MK| = |AB|/2$ a $|NK| = |CD|/2$, odkud $|MN| = |MK| + |NK| = (|AB| + |CD|)/2$.]

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$, pro jehož základny AB a CD platí $|AB| = 2\,|CD|$. Dokažte, že jeho střední příčka je jeho úhlopříčkami rozdělená na tři stejně dlouhé úseky. [Zachovejme označení z řešení úlohy N2. Tam jsme ukázali, že střed K úhlopříčky AC je jejím průsečíkem se střední příčkou MN a přitom platí $|MK| : |NK| = (|AB|/2) : (|CD|/2) = |AB| : |CD|$. Analogicky musí platit, že střed L úhlopříčky BD je jejím průsečíkem se střední příčkou NM a přitom $|ML| : |NL| = |CD| : |AB|$. Z podmínky $|AB| = 2\,|CD|$ tak plyne, že body K, L dělí úsečku MN na tři shodné úseky.]

N4. V trojúhelníku ABC leží bod K na straně AB a bod L na straně AC tak, že $2\,|AK| = |BK|$ a $2\,|AL| = |CL|$. Označme P průsečík úseček BL a CK. Vyjádřete vzdálenost bodu P od přímky BC pomocí vzdálenosti v bodu A od téže přímky BC. [$v/2$. Trojúhelníky ABC a AKL jsou podobné podle věty *sus* s koeficientem $1/3$, takže $|KL| = |BC|/3$, $KL \parallel BC$ a vzdálenost bodu A od přímky KL je $v/3$. Odtud pro neznámé vzdálenosti v_1, v_2 bodu P po řadě od přímek BC a KL plyne $v_1 + v_2 = v - v/3 = 2v/3$. Z podobnosti trojúhelníků BCP a KLP (věta *uu*) získáme pro v_1, v_2 druhou rovnici $v_2/v_1 = |KL|/|BC| = 1/3$. Nyní už snadno vypočítáme $v_1 = v/2$ (a $v_2 = v/6$).]

D1. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechť E, F, G, H jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA. Přímky BH a AC se protínají v bodě I, přímky BD a EC v bodě J, přímky AC a DF v bodě K, přímky AG a BD v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelník $IJKL$ je rovnoběžník. [Nechť S je střed rovnoběžníku $ABCD$. Všimněme si, že bod I je těžištěm $\triangle ABD$ a bod K je těžištěm $\triangle BCD$. Proto $|IS| = |SA|/3 = |SC|/3 = |KS|$. Analogicky $|SJ| = |SL|$. Úhlopříčky čtyřúhelníku $IJKL$ se navzájem půlí, takže jde o rovnoběžník. Jiné řešení: Uvažme středovou souměrnost podle středu rovnoběžníku $ABCD$. V ní se H zobrazí na F a E na G. Průsečík I úseček BH a AC se proto zobrazí na průsečík úseček DF a AC, tedy na K. Analogicky dokážeme, že také J se zobrazí na L. Tím pádem obrazem úsečky IJ je úsečka KL, takže $IJKL$ je skutečně rovnoběžník.]

D2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části. [70–C–I–5]

D3. Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3\,|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A. [Návod.

Uvažte dva průsečíky dotyčné rovnoběžky: jednak s přímkou DF, jednak s přímkou GE. Tyto dva průsečíky splynou, pokud budou mít stejnou vzdálenost od bodu A. Řešení: 70–C–II–3.]

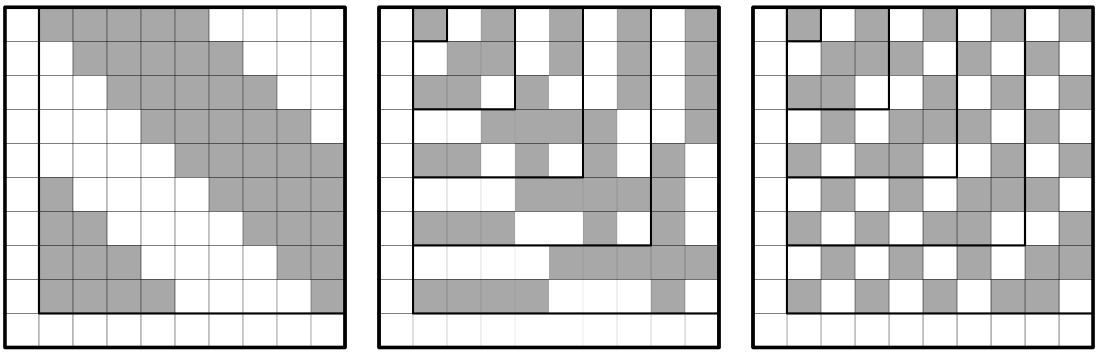
D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť body D a E jsou paty kolmic po řadě z bodů B a C na osu vnějšího úhlu BAC. Označme F průsečík úseček BE a CD. Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímku DE. [Cílem je dokázat $BD \parallel AF$. K tomu stačí ověřit, že pro příčku AF v $\triangle EDB$ platí $|AE| : |AD| = |FE| : |FB|$. Na to použijeme podobnost $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ a poté podobnost $\triangle FEC \sim \triangle FBD$, podle kterých postupně dostaneme $|AE| : |AD| = |CE| : |DB| = |FE| : |FB|$, a tudíž jsme hotovi. (CPSJ 2021)]

4. *Tabulka* 10×10 *je vyplněna čísly* 1 *a* -1 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.* (Patrik Bak)

Řešení. Budeme-li všechna čísla uvažované tabulky sčítat po řádcích, dojdeme k závěru, že celkový součet je roven součtu čísel v tom výjimečném řádku, kde se nerovná nule. Tento součet je nejvýše 10, přitom se rovná 10, pokud jsou v dotyčném řádku samé jedničky. (Ke stejnému závěru dojdeme i při sčítání všech čísel tabulky po sloupcích.)

Uvedeme-li nyní příklad vyplněné tabulky 10×10, která splňuje zadání a ve které je součet všech čísel skutečně roven 10, budeme s řešením úlohy hotovi. Víme, že v takové tabulce musí být v jednom řádku i v jednom sloupci samé jedničky. Umístíme je do prvního sloupce zleva a do posledního řádku shora. Pak je naším úkolem vyplnit zbylý čtverec 9×9 (v pravém horním rohu tabulky) čísly 1 a -1 tak, aby v každém jeho řádku i sloupci bylo právě 5krát číslo -1 (a tedy 4krát číslo 1).

Následující obrázky ukazují tři z možných způsobů, jak popsaný úkol splnit. Pro přehlednost nejsou v tabulkách 10×10 uvedena zapisovaná čísla. Místo toho jsou políčka s číslem 1 bílá (jako je tomu mj. v celém prvním sloupci a celém posledním řádku), políčka s čísly -1 jsou vybarvena.



V levém obrázku je využita tradiční konstrukce s „cyklickým posouváním“ obarvené skupiny polí po řádcích „zbylé“ tabulky 9×9. Prostřední a pravý obrázek jsou rovněž sestaveny nikoli zkusmo, ale užitím obecné metody, které říkáme *matematická indukce.**
Způsob postupného vybarvování na obou obrázcích pochopíme, když si prohlédneme části 1×1, 3×3, 5×5 a 7×7 v levém horním rohu dotyčné tabulky 9×9.

Závěr. Největší možný součet všech čísel v tabulce je roven 10.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Do jednoho řádku je zapsáno 71 čísel. Každé z nich je 1 nebo -1 a přitom součet každých deseti sousedních čísel je roven 0. Dokažte, že první číslo se rovná poslednímu číslu, a určete největší možný součet všech čísel. [Prvních 70 čísel rozdělíme na 7 desetic se součtem nula. Součet všech čísel je tedy roven poslednímu číslu. Podobně zjistíme, že součet všech čísel je roven prvnímu číslu, když uvážíme rozdělení na 7 desetic posledních 70 čísel. První i poslední číslo se tedy rovnají, a to součtu všech čísel, který je tak nejvýše 1. Příklad 71 čísel $1, -1, 1, \ldots, -1, 1$ splňuje podmínku úlohy a jejich celkový součet je roven 1, což je tedy hledaný největší možný součet.]

* Základní poučení o této metodě najdete v brožuře Matematická indukce ze Školy mladých matematiků.

N2. Tabulka 5×4 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je roven 0. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. [Největší možný součet je 4. Danou tabulku 5×4 (o pěti řádcích a čtyřech sloupcích) rozdělme na horní řádek 1×4 a čtyři čtverce 2×2 s nulovými součty vepsaných čísel. Součet všech čísel v tabulce je tedy roven součtu čísel v prvním řádku, takže je nejvýše 4. Součtu rovného 4 dosáhneme, pokud tabulku vyplníme tak, že do prvního, třetího a pátého řádku dáme samé 1, zatímco do druhého a čtvrtého řádku dáme samé -1.]

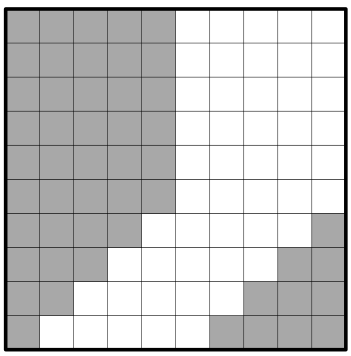
N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček? [Pro každé takové d: Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d.

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

]

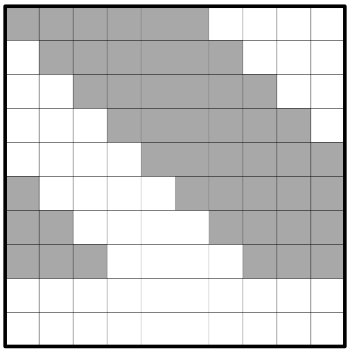
D1. Je možné vyplnit čtvercovou tabulku čísly 1 a -1 tak, aby součet čísel v nějakém sloupci byl sudý a jiném sloupci byl lichý? [Ne. Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je v každém sloupci n čísel. Je-li a z nich rovno 1, je ostatních $n-a$ rovno -1, takže součet čísel v tomto sloupci je roven $a - (n - a) = 2a - n$. Toto číslo je sudé, resp. liché, právě když je takové číslo n. Tedy všechny součty čísel v jednotlivých sloupcích mají stejnou paritu. Jiné vysvětlení: Parita součtu čísel v daném sloupci se nezmění, když v něm každé číslo -1 zaměníme číslem 1.]

D2. Je možné vyplnit tabulku 10×10 čísly 1 a -1 tak, aby v každém řádku byl součet čísel stejný a v každém sloupci byl jiný? [Ano, viz obrázek, ve kterém jsou obarvena políčka s číslem 1.



]

D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že v aspoň 9 řádcích je součet čísel kladný. a) Dokažte, že v aspoň jednom sloupci je součet čísel kladný. b) Platí stejný závěr i za slabšího předpokladu, že součet čísel je kladný v aspoň 8 řádcích? [a) Nejmenší možný kladný součet v řádku je 2. Součet všech čísel v tabulce je tedy aspoň $9 \times 2 - 10$, což je kladné číslo. Proto je vyloučeno, aby byl součet čísel v každém sloupci nekladný. b) Závěr neplatí obecně, viz příklad na obrázku, kde jsou obarvena právě políčka s číslem 1.



]

D4. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [70–C–I–2]

D5. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí: (i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0; (ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích. [70–C–II–2]

D6. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [Právě pro všechna $n \geqq 3$. Vyplňme vyhovujícím způsobem nejdříve první řádek tabulky $n \times n$. To zřejmě není možné pro $n \in \{1, 2\}$; pro $n \in \{3, 4, 5\}$ to je snadné: $(1, 2, -3)$ pro $n = 3$, $(1, 1, 1, -3)$ pro $n = 4$ a $(2, 2, 2, -3, -3)$ pro $n = 5$. Dále z vyhovujícího řádku pro dané n získáme vyhovující řádek pro $n + 3$ připojením trojice čísel $(1, 2, -3)$. První vyhovující řádek tabulky $n \times n$ tak máme sestrojen pro každé $n \geqq 3$. Z tohoto prvního řádku při daném n nyní snadno sestrojíme celou vyhovující tabulku $n \times n$, a to tak, že do každého dalšího řádku sestavu čísel z předchozího řádku „cyklicky posuneme“ o 1 místo, podobně jako jsme to udělali v tabulce z řešení úlohy N3. (CPSJ 2019)]

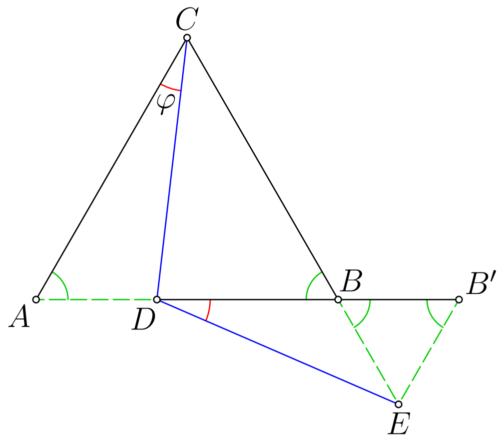
5. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D. Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.*

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Označme $\varphi = |\sphericalangle ACD|$. Protože $|\sphericalangle ACB| = 60°$, má úhel DCE velikost $60° - \varphi$. To je úhel při základně CE rovnoramenného trojúhelníku CDE, takže rovněž platí $|\sphericalangle CED| = 60° - \varphi$. Nyní z trojúhelníku BDE máme

$$|\sphericalangle BDE| = 180° - |\sphericalangle DBE| - |\sphericalangle BED| = 180° - 120° - (60° - \varphi) = \varphi.$$

Tak jsme dokázali, že úhly ACD a EDB jsou shodné, jak je vyznačeno na obrázku 1.



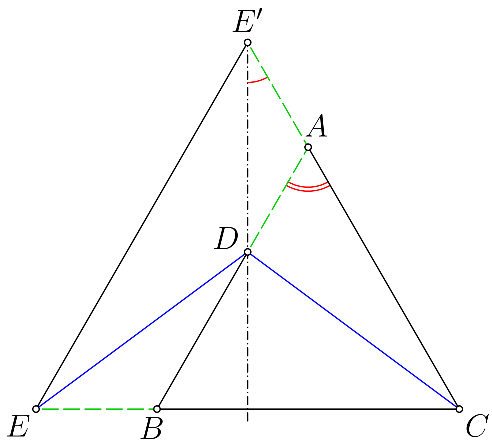
Obr. 1

Všimněme si nyní trojúhelníků CAD a DBE. Ty sice nejsou shodné, ale mají nejen shodné úhly při vrcholech C a D, ale také shodné strany CD a DE (podle zadání), avšak pro jejich úhly při vrcholech A a B platí $|\sphericalangle CAD| = 60°$ a $|\sphericalangle DBE| = 120°$. To nás motivuje k tomu, abychom na prodloužení strany DB za krajní bod B sestrojili pomocný bod B' tak, aby platilo $|B'E| = |BE|$, a tedy také $|\sphericalangle EB'B| = |\sphericalangle EBB'| = 60°$. Pak totiž trojúhelník CAD bude shodný s trojúhelníkem $DB'E$ podle věty *usu*, neboť tyto trojúhelníky mají shodné strany CD a DE, týž úhel φ při vrcholech C a D, týž úhel 60° při vrcholech A a B', a tedy i týž úhel při třetích vrcholech D a E, jak obvyklá formulace věty *usu* vyžaduje.

Shodnost trojúhelníků CAD a $DB'E$ už rychle vede k dokazovanému tvrzení. Plyne z ní totiž, že $|AD| = |B'E|$, avšak podle konstrukce bodu B' máme $|B'E| = |BE|$, takže dohromady dostáváme $|AD| = |BE|$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Při druhém postupu dokreslíme jiný klíčový bod, nežli byl bod B', který nám pomohl v prvním řešení. Máme dokázat shodnost úseček AD a BE, přemístěme za tím účelem jednu z nich na jiné místo.* Zkusme proto přemístit úsečku BE do polohy AE', kde E' leží na polopřímce opačné k polopřímce AC tak, že $|AE'| = |BE|$. Pak nám jistě bude stačit dokázat, že trojúhelník ADE' je rovnoramenný s hlavním vrcholem A (obr. 2).

* Také v prvním řešení jsme vlastně vybrali úsečku BE a otočili ji kolem bodu E do polohy $B'E$, i když jsme to takto nepopsali.

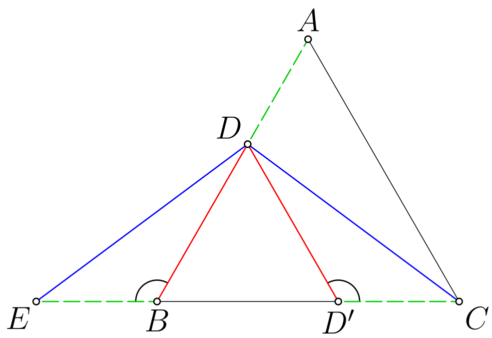


Obr. 2

Z rovností $|AE'| = |BE|$ a $|AC| = |BC|$ plyne $|CE'| = |CE|$, takže trojúhelník $CE'E$ je rovnoramenný, a díky vnitřnímu úhlu ECE' velikosti $60°$ je dokonce rovnostranný.

Podle zadání platí rovnost $|DC| = |DE|$. Bod D tedy leží na ose strany CE rovnostranného trojúhelníku $CE'E$. Tato osa jak známo prochází jeho vrcholem E', a to tak, že půlí vnitřní úhel $CE'E$, který má velikost $60°$. Platí tedy $|\sphericalangle AE'D| = 30°$, což s ohledem na $|\sphericalangle DAE'| = 120°$ znamená, že rovněž $|\sphericalangle ADE'| = 30°$. Trojúhelník ADE' je tedy skutečně rovnoramenný, jak jsme chtěli dokázat.

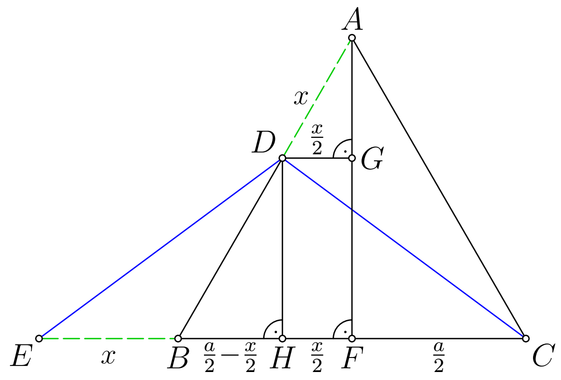
Jiné řešení. Podobně jako v druhém řešení přemístíme jednu z úseček AD, BE jinam. Tentokrát vezmeme úsečku AD a přemístíme ji do polohy CD', kde bod D' leží na úsečce BC tak, že $|CD'| = |AD|$ (viz obr. 3).



Obr. 3

Z rovností $|AD| = |CD'|$ a $|AB| = |BC|$ plyne $|BD| = |BD'|$, takže trojúhelník $BD'D$ je rovnoramenný, a díky vnitřnímu úhlu DBD' velikosti $60°$ je dokonce rovnostranný, tudíž platí $|DB| = |DD'|$. To spolu s $|DE| = |DC|$ a $|\sphericalangle DBE| = 120° = |\sphericalangle DD'C|$ vede k závěru, že trojúhelníky DBE a $DD'C$ jsou shodné podle věty *Ssu*. Platí tudíž $|BE| = |D'C| = |AD|$, takže jsme s důkazem hotovi.

Jiné řešení. Uvedeme ještě jeden postup, k němuž nás může inspirovat další obrázek 4, na kterém má rovnostranný trojúhelník ABC vodorovnou základnu BC a vrchol A „nad ní“. Budeme totiž počítat se vzdálenostmi bodů od svislé výšky AF trojúhelníku ABC.



Obr. 4

Kromě paty F výšky AF, který je středem základny BC, jsme na obrázku vyznačili ještě kolmé průměty G a H bodu D po řadě na úsečky AF a BC. Všimněme si trojúhelníku ADG: ten je pravoúhlý a díky zřejmé rovnoběžnosti $DG \parallel BC$ má při vrcholu D úhel velikosti 60°. Je známo, že v takovém trojúhelníku je přepona dvakrát delší nežli odvěsna, která svírá úhel velikosti 60° s přeponou*: Při označení $x = |AD|$ tak platí $|DG| = x/2$.

Z pravoúhelníku $HFGD$ vidíme, že $|HF| = |DG| = x/2$. Pokud ještě označíme $a = |BC|$, budeme mít $|FC| = |FB| = a/2$ a $|HB| = |FB| - |HF| = a/2 - x/2$. Z předpokladu $|DC| = |DE|$ plyne, že bod H je střed základny EC rovnoramenného trojúhelníku DEC. Díky tomu máme $|HE| = |HC| = |HF| + |FC| = x/2 + a/2$, odkud už dostáváme

$$|BE| = |HE| - |HB| = (x/2 + a/2) - (a/2 - x/2) = x = |AD|,$$

což jsme měli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V situaci ze soutěžní úlohy najděte dvě dvojice shodných úhlů velikostí menších než 60°. [Jednu takovou dvojici máme v rovnoramenném trojúhelníku DCE: $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DEC|$. Protože však tyto shodné úhly mají vyjádření $|\sphericalangle DCE| = 60° - |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DEB| = 60° - |\sphericalangle BDE|$ (neboť $|\sphericalangle DBE| = 120°$), je druhou dvojicí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BDE|$.]

N2. V situaci ze soutěžní úlohy najděte příklad dvou trojúhelníků, označme je KLM a $K'L'M'$, které splňují tyto podmínky: $|LM| = |L'M'|$, $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'M'L'|$ a $|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle L'K'M'| = 180°$. Poté dokažte, že z těchto tří obecně zapsaných podmínek plyne rovnost $|KL| = |K'L'|$. [Příklad ze soutěžní úlohy: $KLM = ADC$ a $K'L'M' = BED$ (plyne z řešení úlohy N1). Důkaz rovnosti $|KL| = |K'L'|$ je triviální v případě, kdy $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle L'K'M'| = 90°$. Dále proto předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|\sphericalangle L'K'M'| > 90°$. Pak na polopřímce opačné k polopřímce $K'M'$ existuje takový bod K'', že $|K''L'| = |K'L'|$. Zřejmě platí $|\sphericalangle L'K''M'| = 180° - |\sphericalangle L'K'M'| = |\sphericalangle LKM|$, a tak se trojúhelníky $K''L'M'$ a KLM shodují ve dvou vnitřních úhlech a jedné straně, jsou tedy shodné, odkud už plyne $|KL| = |K''L'|$ neboli $|KL| = |K'L'|$, což jsme měli dokázat. Pro znalce sinové věty dodejme, že tvrzení úlohy je okamžitým důsledkem této věty užité pro trojúhelníky KLM a $K'L'M'$ s přihlédnutím ke vzorci $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.]

* Je-li totiž D' obraz D v souměrnosti podle středu G, je ADD' rovnostranný trojúhelník a bod G je střed jeho základny DD', takže $|AD| = |DD'| = 2|DG|$.

D1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC, N střed těžnice AM a P průsečík polopřímky BN se stranou AC. Určete poměr $|AP| : |PC|$. [1 : 2. Uvažme střed S úsečky PC. Potom MS je střední příčka v $\triangle BCP$, a proto $MS \parallel BP$, tudíž NP je střední příčka v $\triangle AMS$. Proto platí $|AP| = |PS| = |SP|$, odkud už $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Doplňme trojúhelník ABM na rovnoběžník $ABMB'$ se středem N. Pak P je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCB'$, takže trojúhelníky BCP a $B'AP$ jsou podle věty *uu* podobné, odkud plyne $|AP| : |CP| = |B'A| : |BC| = |BM| : |BC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Označme B' obraz bodu B v souměrnosti se středem A a K průsečík polopřímky BN s úsečkou $B'C$. Pak AM je střední příčka v $\triangle B'BC$, takže platí $AM \parallel B'C$. Odtud plyne, že shodné úsečky AN a NM jsou středními příčkami v $\triangle B'BK$, resp. $\triangle KBC$, a proto jsou shodné i odpovídající strany $B'K$ a KC, neboli K je střed BC. Bod P tak je průsečík dvou těžnic CA, BK trojúhelníku $B'BC$, je to tedy jeho těžiště, a proto $|AP| : |PC| = 1 : 2$.]

D2. V trojúhelníku ABC je bod M středem strany BC. Bod K leží na těžnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je průsečík polopřímky CK se stranou AB. Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný. [Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABA'C$. Pak platí $|CA'| = |AB| = |CK|$, takže CKA' je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C, tudíž úhly CKA' a CAK' jsou shodné. Odtud užitím vět o vrcholových a střídavých úhlech už plyne shodnost úhlů LKA a LAK, takže trojúhelník AKL je skutečně rovnoramenný (s hlavním vrcholem L).]

D3. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF. [68–C–S–3]

D4. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC o středu D označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z bodu D na přímku BM. Dokažte, že $AP \perp PC$. [Doplňme trojúhelník ABD na rovnoběžník $ABDB'$ se středem M. S ohledem na $|AB'| = |BD| = |DC|$ je $ADCB'$ pravoúhelník, na jehož kružnici opsané díky pravému úhlu DPB' leží bod P. Proto je pravý také úhel APC, jak jsme měli dokázat.]

D5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž M je pata kolmice z vrcholu D ke straně AB. Průsečík osy úsečky DM s přímkou AC označme K. Dokažte, že úhel AKD je pravý. [Uvažme bod A' souměrně sdružený s bodem A vzhledem k průsečíku K. Protože body A a A' mají od osy úsečky DM stejnou vzdálenost, leží bod A' na rovnoběžce s přímkou AB, která prochází vrcholem D. Díky tomu je bod C vnitřním bodem úsečky AA', takže úhly $A'AB$ a $A'AD$ jsou vlastně úhly CAB, resp. CAD, které oba mají velikost $36°$ (po snadném výpočtu). Z dokázané shodnosti úhlů $A'AB$, $A'AD$ a ze shodnosti střídavých úhlů $A'AB$, $AA'D$ plyne shodnost úhlů $A'AD$ a $AA'D$, takže $AA'D$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AA', jejíž střed je právě bod K. Úhel AKD je tudíž skutečně pravý.]

6. *Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost*

$$\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)+\left(b^2-d^2\right)\left(c^2-a^2\right)=2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

Řešení. Levou stranu zadané rovnice roznásobme a dále upravujme:

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)(c^2-d^2)+(b^2-d^2)(c^2-a^2)&=\\ &=(a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2)+(b^2c^2-a^2b^2-c^2d^2+a^2d^2)=\\ &=a^2c^2+b^2d^2-a^2b^2-c^2d^2=a^2(c^2-b^2)+d^2(b^2-c^2)=\\ &=(a^2-d^2)(c^2-b^2)=(a-d)(a+d)(c-b)(c+b).\end{aligned}$$

Rovnice ze zadání je tedy ekvivalentní s rovnicí

$$(a-d)(a+d)(c-b)(c+b)=2021=43\cdot 47.$$

Čísla a, b, c, d jsou přirozená, takže oba činitelé $a+d$ a $c+b$ z levé strany rovnice jsou celá čísla větší než 1. Protože však 43 a 47 jsou prvočísla, jejich součin je dělitelný součinem dvou čísel větších než 1, jen když jde o samotná čísla 43 a 47. Naše rovnice tak může být splněna jediným způsobem:

$$\{a+d,c+b\}=\{43,47\} \quad \text{a} \quad (a-d)(c-b)=1. \tag{1}$$

Nutně tedy platí $a+b+c+d=90$. Pokud ukážeme, že čísla a, b, c, d splňující zadání úlohy existují, budeme s řešením hotovi.

Zkusme například zajistit splnění rovnice následovně:

$$\begin{aligned}a+d&=43,\\ a-d&=1,\end{aligned}\qquad \text{a zároveň} \qquad \begin{aligned}c+b&=47,\\ c-b&=1.\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že vyhovuje (jediná) čtveřice $(a,b,c,d)=(22,23,24,21)$, která je přitom skutečně sestavena z přirozených čísel.

Závěr. Součet $a+b+c+d$ má jedinou možnou hodnotu rovnou číslu 90.

Poznámka. Náš postup můžeme doplnit o zjištění všech čtveřic (a,b,c,d), které vyhovují zadání úlohy. Protože druhá část podmínky (1) znamená buď $a-d=c-b=1$, nebo $a-d=c-b=-1$, hledáme všechna řešení čtyř soustav rovnic:

$$\begin{array}{llll} a+d=43 & a+d=47 & a+d=43 & a+d=47\\ a-d=1 & a-d=1 & a-d=-1 & a-d=-1\\ c+b=47 & c+b=43 & c+b=47 & c+b=43\\ c-b=1 & c-b=1 & c-b=-1 & c-b=-1 \end{array}$$

Každá z těchto soustav má jediné řešení (a,b,c,d), jsou to po řadě čtveřice

$$(22,23,24,21),\quad (24,21,22,23),\quad (21,24,23,22),\quad (23,22,21,24).$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab+bc+cd+da=77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu. [Jediná hodnota 18. Platí $ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)=(a+c)(b+d)$. Protože $77=7\cdot 11$, $a+c>1$, $b+d>1$, tak nutně $\{a+c,b+d\}=\{7,11\}$, tudíž $a+b+c+d=18$, přitom čtveřice $(a,b,c,d)=(1,1,6,10)$ vyhovuje zadání.]

N2. Pro přirozená čísla a, b, c platí $a(a+b+c)+bc=143$. Určete všechny možné hodnoty $|b-c|$. [Jediná hodnota 2. Roznásobením levé strany rovnice dostaneme $a^2+ab+ac+bc$, což můžeme postupným vytýkáním upravit takto: $a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$. Platí $143=11\cdot 13$, $a+b>1$ a $a+c>1$, tak nutně $\{a+b,a+c\}=\{11,13\}$, odkud $|b-c|=|(a+b)-(a+c)|=|11-13|=2$, přitom trojice $(a,b,c)=(1,10,12)$ vyhovuje zadání.]

D1. V každém políčku tabulky 2×2 je napsáno přirozené číslo. Sečteme-li součin čísel v prvním sloupci, součin čísel ve druhém sloupci, součin čísel ve prvním řádku a součin čísel ve druhém řádku, dostaneme výsledek 2021. a) Určete všechny možné hodnoty součtu všech čtyř čísel v tabulce. b) Najděte počet tabulek splňujících zadání, které obsahují čtyři navzájem různá čísla. [a) Jediná hodnota 90, b) 3 528. a) Čísla v tabulce lze označit a, b, c, d tak, že $ab+cd+ac+bd=(a+d)(b+c)=2021=43\cdot 47$. Odtud plyne $\{a+d,b+c\}=\{43,47\}$, takže nutně $a+b+c+d=43+47=90$. b) Podle řešení a) rozlišíme dva případy: $a+d=43$ a $b+c=47$, resp. $a+d=47$ a $b+c=43$. V prvním případě lze dvojici (a,d) zvolit právě 42 způsoby a dvojici (b,c) právě 46 způsoby, ve druhém případě jsou tyto počty naopak. Dohromady tak existuje $2\cdot 42\cdot 46$ různých vyhovující tabulek, ovšem včetně těch, ve kterých se některá dvě čísla rovnají. Jejich počet potřebujeme zjistit, abychom ho pak mohli od celkového počtu odečíst. Protože 43 a 47 jsou lichá čísla, tak v každé vyhovující tabulce platí $a\neq d$ a $b\neq c$. V každé tabulce se stejnými čísly proto musí platit aspoň jedna z rovností $a=b$, $a=c$, $d=b$, $d=c$, přitom díky $a+d\neq b+c$ to bude právě jedna z nich (vylučte dvě rovnosti rozborem všech možností jejich výběru). Jednotlivé z těchto čtyř rovností vždy splňuje 42 vyhovujících tabulek v každém ze dvou rozlišených případů, takže jejich celkový počet je $2\cdot 4\cdot 42=8\cdot 42$. Hledaný počet je proto $2\cdot 42\cdot 46-8\cdot 42=3\,528$. (CPSJ 2021)]

D2. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému jejímu vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách. [31. Je-li (a,b) dvojice čísel na přední a zadní stěně, (c,d) dvojice čísel na horní a dolní stěně, konečně (e,f) dvojice čísel na levé a pravé stěně, pak roznásobením součinu $(a+b)(c+d)(e+f)$ dostaneme osm sčítanců, kterými jsou právě čísla připsaná vrcholům krychle (v každém vrcholu se stýkají tři stěny, po jedné z popsaných tří dvojic stěn). Platí tedy $(a+b)(c+d)(e+f)=1001=7\cdot 11\cdot 13$, odkud nutně $\{a+b,c+d,e+f\}=\{7,11,13\}$, takže $a+b+c+d+e+f=7+11+13=31$.]

D3. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí $a+ab+abc+ac+c=2017$. [Návod. Přičtěte k oběma stranám rovnice číslo 1, abyste pak levou stranu mohli rozložit na součin dvou činitelů. Řešení: 67–B–I–4.]

D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete tato prvočísla. [Část a) úlohy 70–A–I–1.]