72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

# Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

**V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.**

**1.** *Uvažujme* 2022 *zlomků*

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2021}{1}$$

*ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven* 2022*. Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozdíl dvou přirozených čísel je roven 4, přičemž jedno z čísel je násobkem druhého. O jaká čísla se jedná?

N2. Číslo 73 rozložte na součet dvou přirozených čísel tak, aby jejich podíl byl také přirozené číslo.

N3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n$ nabývá zlomek

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselné hodnoty.

D1. Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n$ nabývá zlomek

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselné hodnoty.

D2. Každý zlomek ze zadání soutěžní úlohy, který *nenabývá* celočíselné hodnoty, zkrátíme na zlomek v základním tvaru. Určete všechny ty původní zlomky, které po zkrácení budou mít jmenovatel rovný 2.

**2.** *Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně 1,12. Dokažte, že z nich má aspoň 22 jedniček. (Možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.)* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pažout dostal z desetiminutovek osmkrát známku 5, šestkrát známku 4, čtyřikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Kolik by k tomu ještě musel dostat jedniček, aby se průměr jeho známek zlepšil přesně o 1 stupeň?

N2. Horáček dostal z desetiminutovek nejprve třikrát známku 2, další jeho známky už byly pouze pětky. Kolik jich dostal, byl-li průměr jeho známek horší než 4,2?

N3. Čermáková měla z desetiminutovek, kterých bylo méně než 15, průměr známek přesně 1,75. O kolik známek mohlo jít?

N4. Mach tvrdí, že kdyby z další desetiminutovky dostal známku 1, vylepšil by si tak průměr z přesně 1,15 na přesně 1,12. Je to možné?

D1. Kropáček měl z několika desetiminutovek průměr známek přibližně 3,14 (zaokrouhleno na setiny). Mohlo jít o osm známek?

**3.** *V trojúhelníku $ABC$ označme $M$ střed strany $AB$, $N$ střed strany $AC$ a $P$ střed úsečky $MN$. Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.* (Patrik Bak, Eliška Macáková)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Užitím podobných trojúhelníků odvoďte známou vlastnost středních příček obecného trojúhelníku $ABC$: *Je-li $M$ střed strany $AB$ a $N$ střed strany $AC$, pak* $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.

N2. Jsou dány rovnoběžky $p$, $q$ a bod $S$, který na nich neleží. Na přímce $p$ jsou dány tři různé body $A$, $B$, $C$. Průsečíky přímky $q$ s přímkami $SA$, $SB$, $SC$ jsou označeny po řadě $D$, $E$, $F$. Dokažte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

N3. Připomeňte si Thaletovu větu a užijte ji k důkazu tvrzení: *Osa pravého úhlu v různostranném pravoúhlém trojúhelníku půlí úhel mezi jeho výškou k přeponě a těžnicí k přeponě.*

D1. Vrchol $C$ čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky $AK$ i úsečky $DJ$, body $E$, $F$, $G$ a $H$ jsou po řadě středy úseček $BC$, $BK$, $DK$ a $DC$. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů $S$ a $T$ čtverců $ABCD$ a $CJKL$.

D2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu $AB$ v jejím středu $S$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku $BCS$ je shodná s kružnicí $k$.

D3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami $AB$, $CD$ označíme $P$ průsečík vnitřních úhlů u vrcholů $A$, $D$ a $Q$ průsečík vnitřních úhlů u vrcholů $B$, $C$. Dokažte, že body $P$ a $Q$ leží na téže rovnoběžce se základnami lichoběžníku.

**4.** *Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole $k$ hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \ldots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?* (Radek Horenský)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Šebestová roztrhla list papíru na tři kousky, poté některé z těchto kousků opět roztrhla každý na tři kousky, atd. Rozhodněte, které počty kousků 4, 5, 6, . . . , 20 mohla tímto postupem získat.

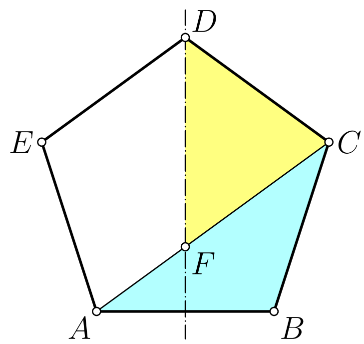
N2. Na tabuli je napsáno a) 5 písmen R a 5 písmen S, b) 25 písmen R a 30 písmen S. V každém kroku smažeme dvě napsaná písmena a nahradíme je písmenem R, resp. S, byla-li smazaná písmena různá, resp. stejná. Které písmeno zůstane na tabuli poslední?

N3. Na tabuli jsou napsány 3 jedničky, 4 dvojky a 3 trojky. V každém kroku je povoleno smazat libovolné dvě různé číslice a připsat místo nich zbývající třetí číslici. Po sérii takových úprav se nám podařilo dojít k situaci, kdy na tabuli zůstala jediná číslice, a to dvojka. Mohlo se stát, že při jiném průběhu úprav bychom došli k jiné jediné číslici, tj. k jedničce nebo trojce? Změní se odpověď při jiných výchozích počtech číslic?

D1. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla od 1 do 100. V každém kroku smažeme trojici po sobě jdoucích čísel (existuje-li taková trojice). Mohou na tabuli zůstat nakonec čísla, jejichž celkový součet bude 111?

D2. Vraťme se k situaci z úlohy N3 s obecnými výchozími počty číslic. Rozhodněte, zda je možné, abychom dvěma odlišnými postupy úprav došli jednou k jediné číslici 1 a podruhé k jediné číslici 3.

**5.** *Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky $AC$ s osou strany $AB$ označme $F$. Dokažte, že trojúhelníky $ABC$ a $CDF$ mají stejný obsah.* (David Hruška)




Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že pravidelný pětiúhelník je konvexní pětiúhelník, které má shodné všechny strany i všechny vnitřní úhly.

N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujeme osy všech jeho stran a osy všech jeho úhlopříček. Kolik různých přímek to bude? Vysvětlete, proč každá z nich je osou souměrnosti celého pětiúhelníku a prochází jedním jeho vrcholem.

N2. Dokažte, že každé čtyři vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku.

N3. Rovnoběžné úsečky $KL$ a $MN$ neleží na jedné přímce. Dokažte, že trojúhelníky $KLM$ a $KLN$ mají stejný obsah.

D1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme $G$ průsečík úhlopříček $AC$ a $BD$. Dokažte, že čtyřúhelník $AGDE$ je kosočtverec.

D2. Dokažte, že dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které vycházejí z jednoho jeho vrcholu, rozdělují příslušný vnitřní úhel na třetiny.

D3. Označme $a$ délku strany a $u$ délku úhlopříčky daného pravidelného pětiúhelníku. Dokažte rovnost $a^2 + au = u^2$.

**6.** *Určete největší přirozené číslo* $n \geqq 10$ *takové, že pro libovolných* 10 *různých čísel z množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *platí následující tvrzení: Není-li ani jedno z těchto* 10 *čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ lze vybrat 4 různá čísla tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. Najděte rovněž všechny takové výběry.

N2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ vybrat $n-1$ čísel tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem.

D1. Ukažte, že počet všech šestimístných prvočísel nepřevyšuje 300 000.

D2. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo.

D3. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu?

**Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.**

**1.** *Uvažujme* 2022 *zlomků*

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \ldots, \frac{2021}{1}$$

*ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven* 2022. *Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozdíl dvou přirozených čísel je roven 4, přičemž jedno z čísel je násobkem druhého. O jaká čísla se jedná? [$(5,1), (6,2), (8,4)$. Nechť $a > b$ jsou hledaná čísla. Pak menší číslo $b$ je dělitelem většího čísla $a$, a tedy i dělitelem čísla $a - b$, které se podle zadání rovná 4. Proto $b \in \{1,2,4\}$. Tento poznatek plyne i z vyjádření podílu obou čísel ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}.\ ]$$

N2. Číslo 73 rozložte na součet dvou přirozených čísel tak, aby jejich podíl byl také přirozené číslo. [Jediné řešení 72 + 1. Postupujte podobně jako v řešení N1: využijte kupříkladu vyjádření

$$\frac{a}{b} = \frac{73-b}{b} = \frac{73}{b} - 1$$

a poznatku, že 73 je prvočíslo.]

N3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n$ nabývá zlomek

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{1,2,5\}$. Z úpravy

$$\frac{4n+1}{2n-3} = \frac{2(2n-3)+7}{2n-3} = 2 + \frac{7}{2n-3}$$

vidíme, že hledáme právě ta $n$, pro která je celé (třeba i záporné) číslo $2n-3$ dělitelem čísla 7, tj. jedním z čísel $\pm 1$, $\pm 7$. Některé z rovnic $2n-3 = \pm 1$, $2n-3 = \pm 7$ vyhovují právě hodnoty $n \in \{-2,1,2,5\}$, z nichž záporné $n = -2$ musíme kvůli zadání vyloučit.]

D1. Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n$ nabývá zlomek

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{8,24,72\}$. Daný zlomek má celočíselnou hodnotu $k$, právě když platí $n + 72 = 2nk$ neboli $72 = n(2k-1)$. Odtud vidíme, že celé číslo $2k-1$ je kladné a že je to lichý dělitel čísla 72. Proto $2k-1 \in \{1,3,9\}$ a rovnost $72 = n(2k-1)$ je pak splněna pro tři výše uvedená $n$.]

D2. Každý zlomek ze zadání soutěžní úlohy, který *nenabývá* celočíselné hodnoty, zkrátíme na zlomek v základním tvaru. Určete všechny ty původní zlomky, které po zkrácení budou mít jmenovatel rovný 2. [$\frac{2018}{4}$, $\frac{2010}{12}$ a $\frac{674}{1348}$. Budou to právě zlomky s jmenovatelem $2k$ pro vhodné $k$ od 1 do 1011, jejichž čitatel $2022 - 2k$ je dělitelný číslem $k$, ne však číslem $2k$. Ekvivalentně vyjádřeno: Číslo 2022 je dělitelné číslem $k$, ne však číslem $2k$. Hledáme tedy ta $k$ od 1 do 1011, která dělí číslo 2022, nedělí však číslo 1011. Jsou to zřejmě pouze *sudá* čísla 2, 6 a 674, kterým odpovídají tři úvodem vypsané zlomky.]

**2.** *Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně* 1,12*. Dokažte, že z nich má aspoň* 22 *jedniček. (Možné známky jsou* 1, 2, 3, 4, 5*.)* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pažout dostal z desetiminutovek osmkrát známku 5, šestkrát známku 4, čtyřikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Kolik by k tomu ještě musel dostat jedniček, aby se průměr jeho známek zlepšil přesně o 1 stupeň? [10. Potřebný počet jedniček označme $n$. Protože původní průměr má hodnotu

$$\frac{8\cdot 5+6\cdot 4+4\cdot 3+2\cdot 2}{8+6+4+2}=\frac{80}{20}=4,$$

po přidání $n$ jedniček má být roven 3, tj. má platit

$$\frac{8\cdot 5+6\cdot 4+4\cdot 3+2\cdot 2+n\cdot 1}{8+6+4+2+n}=\frac{80+n}{20+n}=3.$$

Řešením rovnice $80+n=3(20+n)$ dostaneme $n=10$.]

N2. Horáček dostal z desetiminutovek nejprve třikrát známku 2, další jeho známky už byly pouze pětky. Kolik jich dostal, byl-li průměr jeho známek horší než 4,2? [Aspoň 9. Počet pětek označme $n$. Má platit

$$\frac{3\cdot 2+n\cdot 5}{3+n}=\frac{5n+6}{n+3}>4{,}2=\frac{21}{5}.$$

Úpravou nerovnice $(5n+6)\cdot 5>21\cdot(n+3)$ dostaneme $4n>33$, takže $n\geqq 9$.]

N3. Čermáková měla z desetiminutovek, kterých bylo méně než 15, průměr známek přesně 1,75. O kolik známek mohlo jít? [4, 8 nebo 12. Označme $p$ počet známek a $s$ jejich součet. Platí

$$\frac{s}{p}=1{,}75=\frac{175}{100}=\frac{7}{4}.$$

Protože poslední zlomek je v základním tvaru, musí být $s=7k$ a $p=4k$ pro vhodné přirozené číslo $k$. Podle zadání připadají v úvahu pouze hodnoty $k$ rovné 1, 2 a 3.]

N4. Mach tvrdí, že kdyby z další desetiminutovky dostal známku 1, vylepšil by si tak průměr z přesně 1,15 na přesně 1,12. Je to možné? [Není. Při průměru $1{,}15=\frac{23}{20}$ by byl počet známek $p$ násobkem čísla 20, při novém průměru $1{,}12=\frac{28}{25}$ by byl počet známek $p+1$ násobkem čísla 25. Obě čísla $p$ a $p+1$ však nemohou být současně násobky pěti. Jiný postup: Při počtu známek $p$ s průměrem 1,15 by byl jejich součet $1{,}15p$, po obdržení nové jedničky by pak mělo platit

$$\frac{1{,}15p+1}{p+1}=1{,}12.$$

Tato rovnice má sice řešení $p=4$, odpovídá mu však původní součet známek $1{,}15p=4{,}6$, což není celé číslo.]

D1. Kropáček měl z několika desetiminutovek průměr známek přibližně 3,14 (zaokrouhleno na setiny). Mohlo jít o osm známek? [Ne. Označme $p$ počet známek a $s$ jejich součet. Hodnota podílu $s/p$ leží v intervalu $\langle 3{,}135; 3{,}145)$, takže celé číslo $s$ leží v intervalu $\langle 3{,}135p; 3{,}145p)$. Pro $p=8$ však jde o interval $\langle 25{,}08; 25{,}16)$.]

**3.** *V trojúhelníku $ABC$ označme $M$ střed strany $AB$, $N$ střed strany $AC$ a $P$ střed úsečky $MN$. Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.*

(Patrik Bak, Eliška Macáková)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Užitím podobných trojúhelníků odvoďte známou vlastnost středních příček obecného trojúhelníku $ABC$: *Je-li $M$ střed strany $AB$ a $N$ střed strany $AC$, pak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.* [Jelikož $|AM| : |AB| = |AN| : |AC| = 1 : 2$, jsou trojúhelníky $ABC$ a $AMN$ podobné podle věty *sus*. Ze shodnosti jejich úhlů $ABC$ a $AMN$ pak plyne $MN \parallel BC$ a díky podobnostnímu poměru $1 : 2$ platí rovněž $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.]

N2. Jsou dány rovnoběžky $p$, $q$ a bod $S$, který na nich neleží. Na přímce $p$ jsou dány tři různé body $A$, $B$, $C$. Průsečíky přímky $q$ s přímkami $SA$, $SB$, $SC$ jsou označeny po řadě $D$, $E$, $F$. Dokažte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

[Díky shodnosti vrcholových a souhlasných či střídavých úhlů jsou podle věty *uu* navzájem podobné trojúhelníky $SAB$ a $SDE$, stejně jako trojúhelníky $SAC$ a $SDF$, jakož i trojúhelníky $SBC$ a $SEF$. Díky stranám těchto trojúhelníků se společným krajním bodem $S$ mají všechny tři podobnosti stejný koeficient rovný posledním třem zlomkům v dokazované sérii rovností; první tři zlomky vyjadřují tento koeficient pro strany protější k vrcholu $S$ dotyčných trojúhelníků.]

N3. Připomeňte si Thaletovu větu a užijte ji k důkazu tvrzení: *Osa pravého úhlu v různostranném pravoúhlém trojúhelníku půlí úhel mezi jeho výškou k přeponě a těžnicí k přeponě.* [Nechť v trojúhelníku $ABC$ platí $\gamma = 90°$ a $\beta < \alpha$, tj. $\beta < 45°$. Označme $C_1$ střed přepony $AB$ a $C_0$ patu výšky z vrcholu $C$. Podle Thaletovy věty v trojúhelníku $C_1CB$ platí $|C_1C| = |C_1B|$, tudíž $|\sphericalangle BCC_1| = |\sphericalangle C_1CB| = \beta$. V pravoúhlém trojúhelníku $ACC_0$ zase máme $|\sphericalangle ACC_0| = 90° - |\sphericalangle C_0CA| = 90° - \alpha = \beta$. Úhly $BCC_1$ a $ACC_0$, které leží v pravém úhlu $ACB$, tak mají tutéž velikost $\beta < 45°$, a proto se nepřekrývají, a tak osa celého úhlu $ACB$ je současně i osou souměrnosti jeho „zbylé" části mezi úhly $BCC_1$ a $ACC_0$, tj. osou úhlu $C_1CC_0$.]

D1. Vrchol $C$ čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky $AK$ i úsečky $DJ$, body $E$, $F$, $G$ a $H$ jsou po řadě středy úseček $BC$, $BK$, $DK$ a $DC$. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů $S$ a $T$ čtverců $ABCD$ a $CJKL$. [C–55–S–2]

D2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu $AB$ v jejím středu $S$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku $BCS$ je shodná s kružnicí $k$. [C–51–S–2]

D3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami $AB$, $CD$ označíme $P$ průsečík vnitřních úhlů u vrcholů $A$, $D$ a $Q$ průsečík vnitřních úhlů u vrcholů $B$, $C$. Dokažte, že body $P$ a $Q$ leží na téže rovnoběžce se základnami lichoběžníku. [Střed $M$ ramene $AD$ leží na ose $o$ pásu mezi rovnoběžkami $AB$ a $CD$. Protože součet úhlů $BAD$ a $ADC$ je díky $AB \parallel CD$ roven $180°$, součet polovičních úhlů $PAD$ a $ADP$ je roven $90°$, tudíž $PAD$ je pravoúhlý trojúhelník s přeponou $AD$ o středu $M$. Podle

Thaletovy věty je $PAM$ rovnoramenný trojúhelník se základnou $PA$, tudíž úhel $MPA$ je shodný s úhlem $PAM$, a tedy i s úhlem $PAB$. Ze shodnosti (střídavých) úhlů $MPA$ a $PAB$ plyne $MP \parallel AB$, tudíž $M$ leží na ose $o$. Analogickou úvahou o středu $N$ ramene $BC$ zjistíme, že na ose $o$ leží také bod $Q$.]

**4.** *Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole $k$ hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \ldots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?* (Radek Horenský)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Šebestová roztrhla list papíru na tři kousky, poté některé z těchto kousků opět roztrhla každý na tři kousky, atd. Rozhodněte, které počty kousků $4, 5, 6, \ldots, 20$ mohla tímto postupem získat. [Liché počty $5, 7, \ldots, 19$. Celkový počet kousků se každým roztržením jednoho z nich zvětší o 2, takže zůstává lichý jako na počátku.]

N2. Na tabuli je napsáno a) 5 písmen R a 5 písmen S, b) 25 písmen R a 30 písmen S. V každém kroku smažeme dvě napsaná písmena a nahradíme je písmenem R, resp. S, byla-li smazaná písmena různá, resp. stejná. Které písmeno zůstane na tabuli poslední? [Písmeno R v obou případech a) a b). Počet písmen R se po každém kroku buďto nezmění (smažeme-li dvě S či po jednom R a S), nebo se zmenší o 2 (smažeme-li dvě R), takže zůstane po každém počtu kroků lichý, a proto nikdy neklesne na nulu. Protože se po jednom kroku celkový počet písmen na tabuli sníží o 1, po konečném počtu kroků zůstane na tabuli jako poslední písmeno R.]

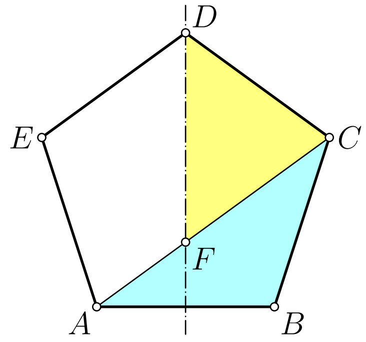
N3. Na tabuli jsou napsány 3 jedničky, 4 dvojky a 3 trojky. V každém kroku je povoleno smazat libovolné dvě různé číslice a připsat místo nich zbývající třetí číslici. Po sérii takových úprav se nám podařilo dojít k situaci, kdy na tabuli zůstala jediná číslice, a to dvojka. Mohlo se stát, že při jiném průběhu úprav bychom došli k jiné jediné číslici, tj. k jedničce nebo trojce? Změní se odpověď při jiných výchozích počtech číslic? [Nemohlo se to stát, ani při jiných výchozích počtech. Zkoumejme aktuální součet $S$ všech číslic na tabuli. Při záměně $(1, 2) \to 3$ se $S$ nezmění, při záměně $(1, 3) \to 2$ se $S$ zmenší o 2, konečně při záměně $(2, 3) \to 1$ se $S$ zmenší o 4. Vidíme, že $S$ nemění svou paritu. Nemůžeme tedy z téhož výchozího stavu někdy dojít k jediné sudé číslici, jindy k jediné liché číslici.]

D1. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla od 1 do 100. V každém kroku smažeme trojici po sobě jdoucích čísel (existuje-li taková trojice). Mohou na tabuli zůstat nakonec čísla, jejichž celkový součet bude 111? [Ne. Součet tří po sobě jdoucích čísel $(n-1)+n+(n+1) = 3n$ je dělitelný třemi, takže součet čísel na tabuli po každém kroku klesne o násobek tří; jeho zbytek při dělení třemi se tudíž nezmění. Na začátku máme součet $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ se zbytkem 1 při dělení třemi, číslo 111 však má zbytek 0.]

D2. Vraťme se k situaci z úlohy N3 s obecnými výchozími počty číslic. Rozhodněte, zda je možné, abychom dvěma odlišnými postupy úprav došli jednou k jediné číslici 1 a podruhé k jediné číslici 3. [Možné to není. Přeznačme číslice 1, 2, 3 za písmena A, B, C v jakémkoli pořadí – povolené úpravy to nijak neovlivní. Proto negativní odpověď k D2 plyne z výsledku N3. Jinak lze společné řešení N3 a D2 podat takto: označit počet jedniček, dvojek a trojek na tabuli po řadě $j$, $d$, $t$ a ukázat, že při úpravách nemění paritu žádný ze tří součtů $j+d$, $j+t$ a $d+t$. Dodejme, že v řešení N3 jsme využili paritu součtu $j+2d+3t$, která je stejná jako parita součtu $j+t$.]

**5.** *Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky $AC$ s osou strany $AB$ označme $F$. Dokažte, že trojúhelníky $ABC$ a $CDF$ mají stejný obsah.*

(David Hruška)




Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že pravidelný pětiúhelník je konvexní pětiúhelník, které má shodné všechny strany i všechny vnitřní úhly.

N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujeme osy všech jeho stran a osy všech jeho úhlopříček. Kolik různých přímek to bude? Vysvětlete, proč každá z nich je osou souměrnosti celého pětiúhelníku a prochází jedním jeho vrcholem. [Pět přímek. Stačí ukázat, že například strana $AB$ a úhlopříčka $CE$ mají společnou osu, která prochází zbylým pátým vrcholem $D$. Vyjdeme z toho, že $BCD$, $CDE$ a $DEA$ jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky s hlavními vrcholy po řadě $C$, $D$, $E$. Odvodíme, že osa úhlu $CDE$ je společnou osou úseček $CE$ a $AB$: Pro první z nich to plyne z rovnoramenného trojúhelníku $CDE$, pro druhou z trojúhelníku $BDA$, který je rovněž rovnoramenný, neboť díky shodným trojúhelníkům $BCD$ a $DEA$ platí $|BD| = |DA|$ a navíc $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle EDA|$.]

N2. Dokažte, že každé čtyři vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku. [Plyne to z řešení N1: Ukázali jsme tam, že osa souměrnosti celého pětiúhelníku procházející vrcholem $D$ je společnou osou úseček $AB$ a $CE$, takže to jsou základny rovnoramenného lichoběžníku $ABCE$ – druhé dvě protější strany $BC$ a $EA$ jsou totiž shodné, ne však rovnoběžné (díky tupým úhlů $ABC$ a $BAE$).]

N3. Rovnoběžné úsečky $KL$ a $MN$ neleží na jedné přímce. Dokažte, že trojúhelníky $KLM$ a $KLN$ mají stejný obsah. [Z podmínky $KL \parallel MN$ plyne, že výšky ke společné straně $KL$ obou trojúhelníků $KLM$ a $KLN$ jsou shodné. Pro ně tak do vzorce $S = \frac{1}{2}zv$ pro obsah obecného trojúhelníku dosadíme stejné hodnoty $z$ a $v$.]

D1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme $G$ průsečík úhlopříček $AC$ a $BD$. Dokažte, že čtyřúhelník $AGDE$ je kosočtverec. [Z lichoběžníků $ACDE$ a $BDEA$ (viz výsledek N2) plyne $AG \parallel DE$ a $GD \parallel EA$, takže $AGDE$ je rovnoběžník; díky $|DE| = |EA|$ jde skutečně o kosočtverec.]

D2. Dokažte, že dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které vycházejí z jednoho jeho vrcholu, rozdělují příslušný vnitřní úhel na třetiny. [Stačí ukázat, že v pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ jsou shodné tři úhly s vrcholem $A$, totiž $BAC$, $CAD$ a $DAE$. Vnitřní úhly pravidelného pětiúhelníku mají velikost $3 \cdot 180° : 5 = 108°$. Proto úhly při základnách rovnoramenných trojúhelníků $ABC$ a $DEA$ mají velikost $\big(180° - 108°\big) : 2 = 36°$. Vidíme, že oba úhly $BAC$ a $DAE$ mají ve srovnání s úhlem $BAE$ třetinovou velikost (neboť $36 : 108 = 1 : 3$), takže třetinovou velikost má i třetí úhel $CAD$. (Dodejme, že z vlastností tzv. *středových* a *obvodových úhlů* v kružnici plyne následující tvrzení pro libovolné $n \geqq 4$: Všechny úhlopříčky pravidelného $n$-úhelníku vycházející z jednoho jeho vrcholu dělí jemu příslušný vnitřní úhel na $n - 2$ shodných částí.)]

D3. Označme $a$ délku strany a $u$ délku úhlopříčky daného pravidelného pětiúhelníku. Dokažte rovnost $a^2 + au = u^2$. [V pravidelném pětiúhelníku $ABCD$ označme $G$ průsečík úhlopříček $AC$ a $BD$. Podle úlohy N2 je $DABC$ rovnoramenný lichoběžník ($DA \parallel BC$), takže trojúhelníky $DAG$ a $BCG$ jsou podle věty *uu* podobné. Platí proto $|DA| : |BC| = |DG| : |GB|$ neboli $u : a = |DG| : |GB|$. Podle úlohy D1 je $AGDE$ kosočtverec o straně $a$, takže platí $|DG| = a$ a $|GB| = |BD| - |DG| = u - a$. Dosazením do $u : a = |DG| : |GB|$ dostaneme $u : a = a : (u - a)$, odkud už snadno plyne rovnost $a^2 + au = u^2$. (Úměra $u : a = a : (u - a)$ znamená, že bod $G$ dělí každou z úhlopříček $AC$ a $BD$ v tzv. *zlatém řezu*.)]

**6.** *Určete největší přirozené číslo* $n \geqq 10$ *takové, že pro libovolných* 10 *různých čísel z množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *platí následující tvrzení: Není-li ani jedno z těchto* 10 *čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ lze vybrat 4 různá čísla tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. Najděte rovněž všechny takové výběry. [Vyhovující výběr 4, 6, 8, 10 je jediný. Musí jít o 4 čísla z množiny $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, která má 6 prvků. Číslo 1 nemůže být ve výběru s třemi čísly 4, 6 a 10, proto je „nepoužitelné“. Totéž platí i pro číslo 9 kvůli podobné „kolizi“ s třemi čísly 4, 8 a 10. V úvahu tak připadají pouze čtyři sudá čísla 4, 6, 8 a 10. Jejich výběr vyhovuje, protože součet každých dvou z nich je rovněž sudé číslo různé od 2.]

N2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ vybrat $n-1$ čísel tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. [Výběr bude mít požadovanou vlastnost, bude-li například sestaven ze sudých složených čísel. Splňuje to výběr $n - 1$ čísel $4, 6, 8, \ldots, 2n$.]

D1. Ukažte, že počet všech šestimístných prvočísel nepřevyšuje 300 000. [Šestimístná jsou čísla od 100 000 do 999 999, je jejich celkem 900 000. Stačí tedy ukázat, že alespoň 600 000 z nich je dělitelných dvěma nebo třemi. Dělitelných dvěma je jich 450 000, dělitelných třemi 300 000. V součtu $450\,000 + 300\,000 = 750\,000$ jsou ovšem započítána dvakrát čísla, která jsou dělitelná dvěma i třemi, tj. čísla dělitelná šesti. Těch je 150 000, takže dvěma nebo třemi je dělitelných právě $750\,000 - 150\,000 = 600\,000$ šestimístných čísel. Poznámka: Podobně zjistíme, že existuje 660 000 šestimístných složených čísel, která jsou dělitelná 2, 3 nebo 5, tudíž počet šestimístných prvočísel nepřevyšuje 240 000. I tento odhad je však velice hrubý – přesný počet šestimístných prvočísel je 68 906.]

D2. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo. [Číslo 731, viz 67–C–S–1]

D3. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu? [505 čísel, viz 67–B–II–4]