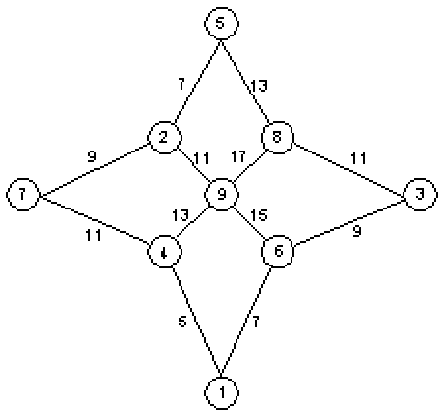
Matematická olympiáda - 48. ročník (1998/1999)

Komentáře k úlohám druhého kola pro kategorie Z5 až Z7

[Zadání úloh]

Z5 – II – 1

Do prostředního kroužku je možné zapsat pouze čísla 8 nebo 9, neboť součet u jedné ze spojnic vycházející z prostředního kroužku je 17, které lze rozložit pomocí čísel 1 – 9 na 8 + 9. Dosadíme-li do prostředního kroužku číslo 8, získáme následným doplňováním čísel podle daného pravidla v dolním kroužku číslo 0, což je v rozporu se zadáním. Úloha má tedy jediné řešení:



Hodnocení:

- doplnění čísla do prostředního kroužku … 3 body
- doplnění ostatních čísel … 3 body

Z5 – II – 2

Je třeba si uvědomit, že sedmičky se vyskytují i v číslech 70, 71, …, 79 (číslo 77 obsahuje dvě sedmičky). V první stovce je tedy 20 sedmiček. Aproximací zjistíme, že se jedná o čísla 177, 187, 197, která odpovídají počtu stránek pohádkových knih..

Hodnocení:

- odhalení počtu sedmiček ve stovce … 3 body
- nalezení jednotlivých ... 3 body

Z5 – II – 3

Rozdělíme-li útvar na čtverečky, jejich počet je 41 a počet čtverečků se stejným obsahem je ve Frantově čtverci ještě 9, dohromady tedy 50. Z toho je zřejmé, že jeden čtvereček má obsah 2 cm^2 (obsah čtverce vydělíme počtem čtverečků). Míšův čtverec je možné rozdělit na 81 stejných čtverečků s obsahem 2 cm^2 (41 v útvaru a 40 doplňujících útvar na daný čtverec). Obsah Míšova čtverce je tedy 81.2=162 cm^2.

Hodnocení:

- určení počtu čtverečků ve Frantově čtverci ... 2 body
- výpočet obsahu jednoho čtverečku … 2 body
- určení počtu čtverečků v Míšově čtverci …1 bod
- výpočet obsahu Míšova čtverce …1 bod

Z6 – II – 1

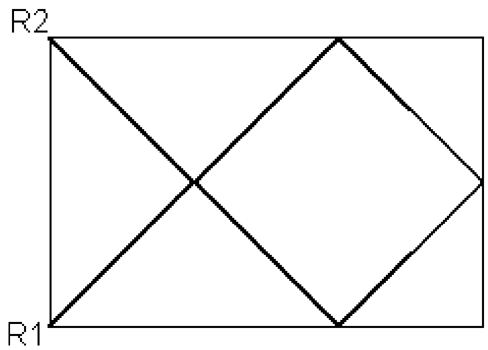
Hmotnost všech jablek v sadu je rovna součinu průměrné hmotnosti z jednoho stromu a celkového počtu stromů, je tedy 1392 kg (87 . 16). Pro hmotnosti jablek na jednotlivých typech stromů platí vztahy 5ž = č a 2,5z = č, kde ž je hmotnost žlutých jablek, z je hmotnost zelených jablek a č je hmotnost červených jablek. Z těchto vztahů a celkového množství jablek dostaneme rovnici 5ž + ž + 2ž = 1392, ž = 174. Ze stromu se žlutými jablky se sklidilo 174 kg jablek, z každého stromu průměrně 174 : 3 = 58 kg jablek. Ze stromu s červenými jablky se sklidilo 5 . 174 = 870 kg jablek, z každého stromu průměrně 870 : 8 = 108,75 kg jablek. Ze stromu se zelenými jablky se sklidilo 870 : 2,5 = 398 kg jablek, z každého stromu průměrně 398 : 5 = 69,6 kg jablek.

Hodnocení*:*

- maximum – 6 bodů
- celkové množství – 2 body
- hmotnost jablek na jednom stromě – 2 body
- hmotnost jablek na zbývajících stromech – 1bod
- průměrná hmotnost na jednotlivých stromech –1 bod

Z6 – II – 2

Biliárová koule vykonala po biliárovém stole dráhu jako na obrázku. Odtud je zřejmé, že pokud delší strana stolu měří 3 m, měří kratší strana stolu 2 m.



Hodnocení*:*

- maximum – 6 bodů
- odhalení zákonitostí – 4 body
- dopočítání kratší strany stolu – 2 body

Z6 – II – 3

Obsahy Moničiných čtverců jsou trojciferná čtvercová čísla, tedy některá z čísel znázorněných v tabulce. Kombinacemi těchto čísel získáme jedinou trojici čísel 361, 529, 784, která vyhovuje předpokladu, že obsahují všechny číslice od 1 do 9.

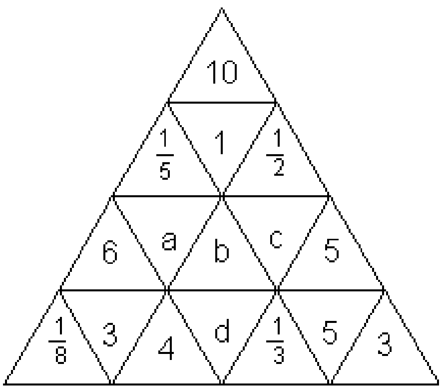
121	144	**169**	**196**	225	**256**	**289**	**324**	**361**	400	441
484	**529**	**576**	**625**	646	**729**	**784**	**841**	900	**961**	

Hodnocení*:*

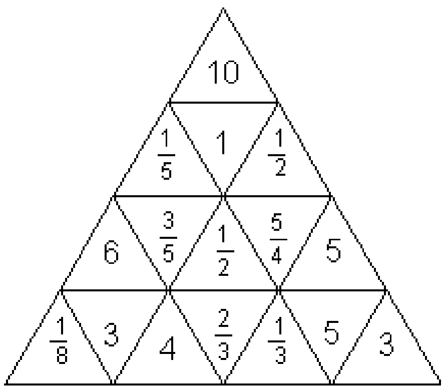
- maximum – 6 bodů
- nalezení všech trojciferných čtvercových čísel – 2 body
- správné řešení – 4 body

Z7 – II – 1

Čísla v rozích "hvězdičkového" trojúhelníku je snadné doplnit na základě zadaného pravidla. Na zbývající pole doplníme proměnné a, b, c, d (viz obr. 1) a vyjádříme mezi nimi vztahy $\frac{6}{5}b = a$, $\frac{5}{2}b = c$, $\frac{4}{3}b = d$, $b = acd$. Doplněním do posledního vztahu Získáme rovnici $b = \frac{5}{6}b \cdot \frac{5}{2}b \cdot \frac{4}{3}b$. Odtud dostaneme $b = \pm\frac{1}{2}$ Jedno řešení je na obrázku 2, druhé je obdobné, pouze v prostředním trojúhelníky jsou všechna čísla opačná.



obr. 1



obr. 2

Poznámka:

Úlohu lze řešit metodou "pokus – omyl".

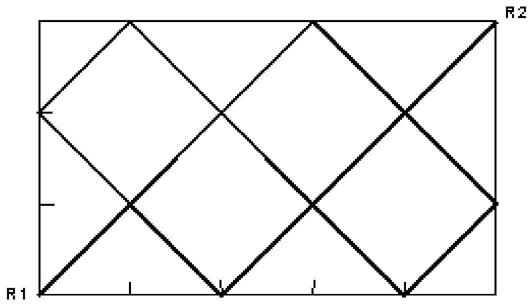
Hodnocení*:*

- maximum – 6 bodů

- čísla v rozích “hvězdičkového” trojúhelníku – 1 bod
- jedno řešení – 3 body
- druhé řešení – 2 body

Z7 – II – 2

Je-li pětinásobek šířky biliárového stolu roven trojnásobku jeho délky, je poměr délky a šířky stolu roven 5 : 3. Dráha koule je naznačena na obrázku 3. Délka dráhy je podle obrázku pětinásobkem dráhy do prvního odrazu, tedy 5 . 168 cm = 840 cm = 8,4 m.



Hodnocení*:*

- maximum – 6 bodů
- poměr délky a šířky stolu – 1 bod
- zakreslení dráhy – 3 body
- délka dráhy vyjádřená v metrech – 2 body

Z7 – II – 3

Řešení je naznačeno v tabulce.

druh zboží	**celk. cena**	**dělitelnost**	**množství**	**cena za kus**
hrnečky	**231**	**3, 7, 11**	**7**	**33**
talíře	**180**	**2, 3, 5, 6**	**6**	**30**
povlečení	**2210**	**2, 5**	**5**	**442**
police	**6513**	**3**	**3**	**2171**
sklenice	**143**	**11**	**11**	**33**
lampy	**3002**	**2**	**2**	**1501**

Rodiče měli tři děti a každé přispělo na nákup částkou 4093 Kč, neboť číslo 12 279, odpovídající celkové ceně, je dělitelné čísly 3 a 4093.

Hodnocení:

- cena za kus – 4 body
- množství dětí a částka, kterou přispěly – 2 body

Z8 - II - 1

Po první zastávce $\frac{1}{6}$ cestujících stála a $\frac{5}{6}$ cestujících obsadilo $\frac{4}{9}$ ze 45 sedadel, tj. 20 sedadel. Na první zastávce tedy nastoupilo 24 cestujících (20 jich sedělo a 4 stáli). Po druhé zastávce $\frac{1}{6}$ cestujících stála a $\frac{5}{6}$ cestujících obsadilo všech 45 sedadel. Autobusem po druhé zastávce tedy jelo 54 cestujících (45 jich sedělo a 9 jich stálo). Jestliže na druhé zastávce vystoupilo *v* cestujících a přistoupilo *p* cestujících, pak platí rovnost
$24 - v + p = 54$, resp. $p = 30 + v$.
Počet cestujících, kteří jeli z první zastávky na třetí zastávku nebo dále, je roven $24 - v$. Počet cestujících, kteří nastoupili na první nebo druhé zastávce, je roven $24 + p$.

Tedy podle zadání platí rovnost $\frac{1}{5}(24 + p) = 24 - v$, resp. $p = 96 - 5v$.

Porovnáním této a výše uvedené rovnosti dostaneme $30 + v = 96 - 5v$ a odtud $v = 11$ (tzn. na druhé zastávce vystoupilo 11 cestujících a 13 cestujících jelo na třetí zastávku nebo dále).
Na druhé zastávce tedy přistoupilo 30 + 11 = 41 cestujících.

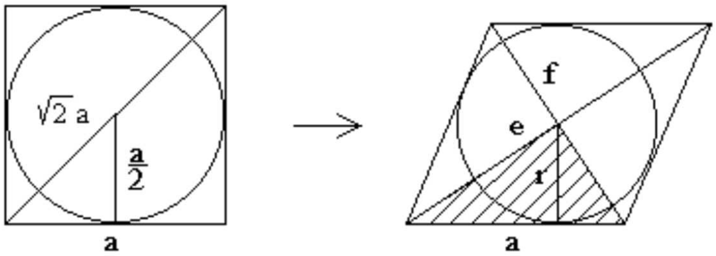
Hodnocení:

- maximum ... 6 bodů
- nalezení počtu cestujících po první zastávce ... 1 bod
- nalezení počtu cestujících po druhé zastávce ... 1 bod
- nalezení rovnosti $p = 30 + v$ ... 1 bod
- nalezení rovnosti $p = 96 - 5v$ ... 2 body
- výpočet neznámé p ... 1 bod

Z8 - II - 2

Delší úhlopříčka kosočtverce má délku $e = 120\%$ z $\sqrt{2}\,a = 1{,}2\sqrt{2}\,a = \sqrt{2{,}88}\,a$. Délku jeho druhé úhlopříčky vypočteme pomocí Pythagorovy věty, tedy ze vztahu $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$. Jeho úpravou dostaneme délku úhlopříčky $f = \sqrt{1{,}12}\,a$.

Pro výpočet poloměru *r* kruhu vepsaného do kosočtverce využijeme dvou vztahů, které platí pro obsah pravoúhlého trojúhelníku (viz obr.):
$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$, $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}$. Z rovnosti těchto dvou vztahů dostaneme $r = \frac{ef}{4a}$ a po dosazení $r = \sqrt{0{,}2016}\,a$. Kruh vepsaný do čtverce má obsah $S_1 = \pi \frac{a^2}{4}$ a obsah kruhu vepsaného do kosočtverce je $S_2 = \pi \cdot 0{,}2016\,a^2$. Hledaný poměr je tedy $S_1 : S_2 = 0{,}8064 : 1$ (resp. 504:625).



Pozn.: Poloměr *r* kruhu vepsaného do kosočtverce lze rovněž určit ze vztahů pro výpočet obsahu kosočtverce: $S = a \cdot 2r,\ S = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ **.**

Hodnocení:

- maximum ... 6 bodů
- výpočet délek úhlopříček kosočtverce ... 2 body
- výpočet poloměru *r* ... 2 body
- vyjádření obsahů kruhů ... 1 bod
- výpočet poměru obsahů ... 1 bod

Z8 - II - 3

Číslo *p*, které je podřízeno dvojcifernému veliteli, bude zřejmě dvojciferné, proto jej můžeme zapsat ve tvaru 10*a*+*b*, kde *a*, *b* jsou jeho cifry. Pro velitele čísla *p* pak platí $v = 10a + b + a + b = 11a + 2b$**. Řešení první části úlohy tedy spočívá v nalezení kořenů rovnic** $11a_1 + 2b_1 = 26$ **a** $11a_2 + 2b_2 = 97$**, kde neznáme** a_i, b_i **jsou celá čísla od 0 do 9. První rovnice má řešení** $a_1 = 2$, $b_1 = 2$**; druhá rovnice řešení nemá. To znamená, že číslo 26 je velitelem čísla 22 a číslo 97 není velitelem žádného čísla.**

Druhou část úlohy řešíme pomocí rovnic nebo na základě objevení zákonitosti mezi podřízenými a veliteli (např. při jejich vypisování). Pokud by nějaký velitel měl dva různé podřízené *ab*, *cd*, pak by muselo existovat řešení rovnice $11a + 2b = 11c + 2d$**, kde neznáme *a*, *b*, *c*, *d* jsou celá čísla od 0 do 9, přičemž** $a \neq c,\ b \neq d$**. Její úpravou na tvar** $\frac{a-c}{d-b} = \frac{2}{11}$ **snadno dojdeme k závěru, že taková čísla neexistují, neboť rozdíl** $d - b$ **nemůže být nikdy roven číslu 11. Tedy žádný dvojciferný velitel nemá více než jednoho podřízeného.**

Hodnocení:

- maximum ... 6 bodů
- nalezení čísla 22 ... 1 bod
- prokázání, že číslo 97 není velitelem ... 2 body
- správná odpověď na otázku ... 1 bod
- zdůvodnění odpovědi ... 2 body

Z9-II-1

Označíme-li počet sudých řad *s*, počet lichých řad *l* a počet stromků v jedné řadě *x*, pak v prvním případě platí rovnost $(s+l) \cdot x = 684$ **a v druhém případě rovnost** $s \cdot (x-1) + l \cdot x = 675$**. Z těchto rovností je zřejmé, že rozdíl 684 – 675 udává počet sudých řad, tedy** $s = 9$ **.**

Lichých řad může být buď stejně jako sudých, nebo o jednu řadu více než sudých. Existují tedy dvě možnosti: $l = 9$ a $l = 10$. Jestliže lichých řad je 9, pak všech řad je 18 a v každé řadě je 684 : 18 = 38 stromků. Jestliže lichých řad je 10, pak všech řad je 19 a v každé řadě je 684 : 19 = 36 stromků.

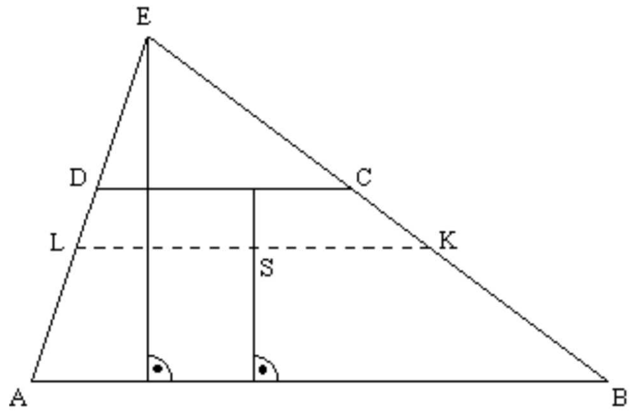
V delší řadě je tedy 36 nebo 38 stromků.

Hodnocení:

- nalezení počtu sudých řad … 2 body
- nalezení počtu lichých řad (obě řešení) … 2 body
- nalezení počtu stromků v delší řadě (obě řešení) … 2 body

Z9-II-2

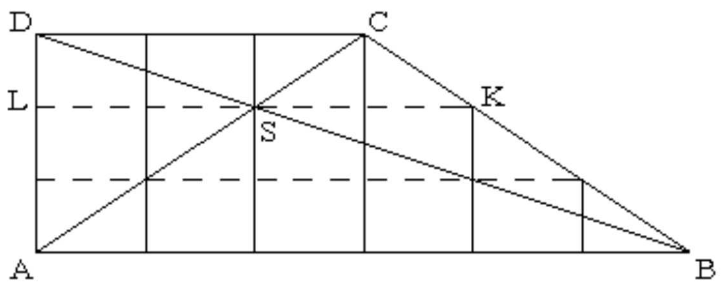
Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků jsou trojúhelníky *ABS a CDS* podobné. Poměr délek příslušných stran těchto trojúhelníků je $|AB| : |CD| = 2 : 1$. Ve stejném poměru jsou rovněž výšky trojúhelníků *ABS a CDS*. Z toho vyplývá, že bod *S* dělí výšku lichoběžníku *ABCD* v poměru 2 : 1 (viz obr. 1).



Lichoběžník *ABCD* doplníme na trojúhelník *ABE* prodloužením jeho ramen *AD a BC. Trojúhelníky ABE a LKE* jsou podobné (podle věty *uu*) a jejich poměr podobnosti je 3 : 2. (Poměr určíme pomocí výšek trojúhelníku *ABE a LKE; výška trojúhelníku ABE je rovna dvojnásobku výš*ky lichoběžníku *ABCD a výška trojúhelníku LKE* je rovna čtyřem třetinám výšky lichoběžníku *ABCD).*

Platí tedy $\frac{|AB|}{|LK|} = \frac{3}{2}$***, tj.*** $|LK| = \frac{2}{3} \cdot |AB|$**. Délka úsečky *KL je 8 cm.***

Poznámka:



Lichoběžník *ABCD* není zadán jednoznačně, proto můžeme použít obrázek

pravoúhlého lichoběžníku, z něhož je výpočet délky úsečky *KL* zřejmý (viz obr. 2).

Hodnocení:

- nalezení podobnosti trojúhelníků *ABS a CDS … 1 bod*
- nalezení poměru podobnosti trojúhelníků *ABS a CDS … 1 bod*
- nalezení vztahu mezi délkou úsečky *KL* a délkou základny lichoběžníku 2 body
- výpočet délky úsečky *KL … 2 body*

Z9-II-3

Levou stranu zadané rovnosti rozdělíme na dva součty: $(p+p^2+p^3)+(r+r^2+r^3)=2393$. Hledaná prvočísla *p, r* budou různá čísla, nebit jinak by musela být levá strana rovnosti rovna sudému číslu. Liché číslo dostaneme sečtením sudého a lichého čísla, proto jeden ze součtu na levé strana rovnosti bude sudý a druhý lichý. Podmínku, ze soucit prvočísla a jeho druhé a třetí mocniny je roven sudému číslu, splňuje pouze prvočíslo 2; v ostatních případech je soucit lichý. Položíme *p = 2, pak platí rovnost* $p+p^2+p^3=2+4+8=14$ a zároveň $r+r^2+r^3=2393-14=2379$. Hledáme tedy takové prvočíslo *r*, jehož třetí mocnina je nejblíže menší než číslo 2379. Nejblíže je třetí mocnina čísla 13 ($13^3=2197$). Dosazením ověříme, ze číslo 13 splňuje rovněž rovnost $r+r^2+r^3=2379$.

Hledanými prvočísly jsou čísla 2 a 13.

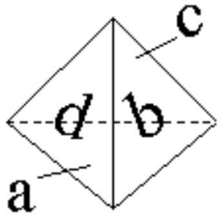
Hodnocení:

- nalezení vlastnosti součtu … 1 bod
- nalezení čísla 2 … 2 body
- nalezení čísla 13 … 3 body

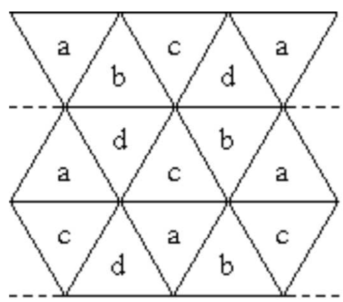
Z9-II-4

Označme stěny čtyřstěnu písmeny *a, b, c, d (a – podstava, b* – pravá boční stěna, *c* – zadní stěna, *d* – levá boční stěna; viz obr. 3).

Libovolným převalováním čtyřstěnu dostaneme vždy stejnou pravidelnou “mapu”, jak je naznačeno na obrázku 4.

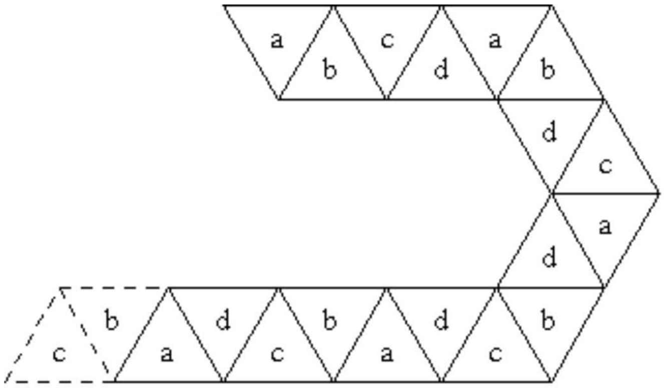


Obr. 3



Obr. 4

Tato pravidelnost je zachována i při převalování po hracím plánu, přičemž během čtyř kroků se vždy vystřídají všechna čísla na stěnách čtyřstěnu (viz obr. 5):



Platí tedy rovnost: $4 \cdot (a+b+c+d) + (a+d) = 132$**. (Tvar rovnosti závisí na způsobu označení stěn čtyřstěnu a na jeho výchozí poloze před převalováním po hracím plánu; ve všech případech však dospějeme ke stejnému řešení.) Součet čísel na všech stěnách může být nejvýše 30 a součet čísel na dvou stěnách nejvýše 17, proto za podmínky různosti čísel na jednotlivých stěnách je výše uvedená rovnost splněna pouze pro** $a+b+c+d=29$ **a zároveň** $a+d=16$**.**

Na stěnách čtyřstěnu byla napsána čísla 5, 7, 8, 9.*:*

Hodnocení:

- objevení pravidelnosti ... 2 body
- sestavení rovnice ... 1 bod
- sestavení soustavy rovnic ... 2 body

nalezení čísel ...1 bod

[Zadání úloh]