Matematická olympiáda - 50. ročník (2000/2001)

Komentáře k úlohám druhého kola pro kategorie Z5 a Z9

Řešení 2. kola kategorii Z5

Z5-II-1

Při cestě do školy udělá Vilík 27 kroků nebo 18 skoků, tedy 27 kroků odpovídá 18 skokům (3 kroky odpovídají 2 skokům, 1,5 kroku odpovídá 1skoku). Vilík tedy při jedné sérii (2 kroky vpřed a jeden skok vzad) udělá **2-1,5 = 0,5** kroku. Takových sérií by musel udělat Vilík **54**, poslední série je však nadbytečná. Vilík udělá 53 sérií a jeden krok navíc (53 . 2 53 . 1,5 + 1 = 27,5), udělá tedy 107 kroků a 53 skoků.

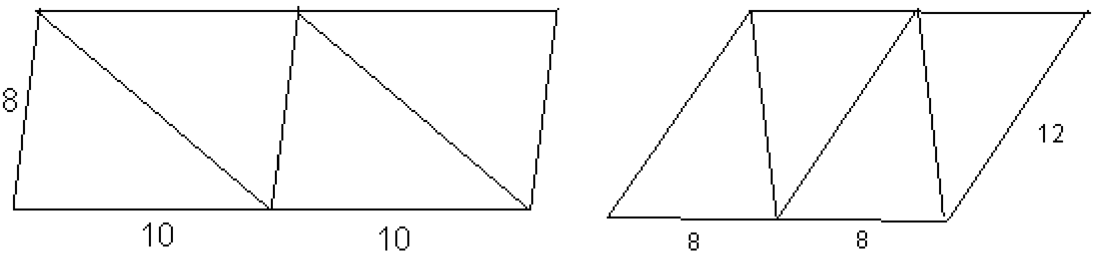
Hodnocení:

porovnání kroků a skoků 1b.
počet sérií 2b.
počet kroků a skoků 3b.

Z5-II-2

Chceme-li sestavit čtyřúhelník, jehož obvod bude 56 cm, budeme potřebovat čtyři trojúhelníky. Neboť složíme-li na čtyřúhelník: dva trojúhelníky, bude jeho obvod maximálně 2 . 12 + 2 . 10 = 44 cm; tři trojúhelníky, bude jeho obvod maximálně 3 . 12 + 10 + 8 = 54 cm. A naopak složíme-li na čtyřúhelník pět trojúhelníků, bude jeho obvod minimálně 5 . 8 + 10 + 12 = 62 cm.

Můžeme sestavit dva čtyřúhelníky - **rovnoběžníky** s délkami **stran 20 cm, 8 cm** a s délkami stran **16 cm, 12 cm**.



Hodnocení:

počet potřebných trojúhelníků 2b.
každý rovnoběžník (i nakreslení) po 2b.

Z5-II-3

Na vrchní kostce je číslo, ve kterém jsou čísla z rohových kostek ve spodní vrstvě započítány jednou, čísla z prostřední kostky ve spodní vrstvě čtyřikrát a čísla z ostatních ve spodní vrstvě dvakrát. Proto musí být číslo na kostce uprostřed spodní vrstvy nejmenší a v rozích spodní vrstvy ta největší.

Na kostky do spodní vrstvy umístíme čísla: **2 (uprostřed), 22, 14, 16, 18 (v rozích) a 4, 6, 8, 10**.

Číslo na vrchní kostce je **22 + 14 + 16 + 18 + 2 . (4 + 6 + 8 + 10) + 4 . 2 = 134**

Hodnocení:

nalezení čísel ve spodní vrstvě 2b.
umístění čísel ve spodní vrstvě 3b.
nalezení čísla na vrchní kostce 1b.

Řešení 2. kola kategorii Z9

Z9-II-1

Učitelé snědli **1386 : 11 = 126** buchet, bylo jich tedy **126 : 6 = 21**. Žáci **snědli 1386 126 = 1260** buchet, bylo jich tedy **1260 : 4 = 315**, přičemž dívek bylo o 13 víc než chlapců. Odtud dostáváme soustavu rovnic $d + ch = 315$, $d = ch + 13$, jejímž řešením je $d = 164$, $ch = 151$. V jídelně tedy obědvalo 164 dívek, 151 chlapců a 21 učitelů.

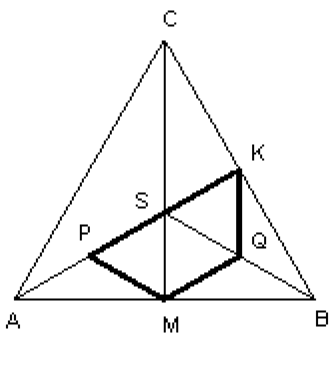
Hodnocení:

počet učitelů 2b.

počet chlapců a dívek 4b.

Z9-II-2

a) V rovnostranném trojúhelníku jsou všechny výšky zároveň těžnicemi i osami stran a osami vnitřních úhlů, a zároveň všechny vnitřní úhly mají velikost 60^0. Odtud velikosti úhlů *ASM*, *MSB* a *BSK* mají velikost 60^0. Zároveň velikosti úseček *SK*, *SQ*, *SM*, *SP* jsou shodné a jsou rovny třetině velikosti výšky rovnostranného trojúhelníka. Odtud a z věty o shodnosti trojúhelníků (V sus) vyplývá, že lichoběžník je složen ze tří shodných trojúhelníků, je tedy rovnoramenný.



b. Ze vzorce pro obsah trojúhelníka $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ a vzorce pro výpočet výšky v rovnostranném trojúhelníku $v_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ (je možné vypočítat podle Pythagorovy věty) dostaneme vztah $\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_a^2$. Odtud úpravou dostaneme $v_a = \frac{3}{2}$. Délky stran lichoběžníku jsou $\mathbf{\frac{1}{2}}$**cm**, $\mathbf{\frac{1}{2}}$

cm, $\frac{1}{2}$

cm a **1 cm**.

Hodnocení:

důkaz 3b.
vypočítání délek stran l. 3b.

Z9-II-3

Rozložíme čísla 30 = 5 . 6, 35 = 5 . 7, 84 = 7 . 12 a 91 = 7 . 13. Odtud je zřejmé, že. výška původního kvádru je 7 cm a délky podstavných hran jsou 5 cm a 12 cm. Musíme ověřit, zda 30 cm^2 je obsahem pravoúhlého trojúhelníka s délkami stran 5 cm a 12 cm a zda pravoúhlý trojúhelník může mít délky stran 5 cm, 12 cm, 13 cm.

Hodnocení:

výška 1b.
další hrany 2b.
ověření 3b.

Z9-II-4

Protože $a\frac{b}{9}$ a $c\frac{d}{28}$ jsou smíšená čísla, musí být $b < 9$ a zároveň $d < 28$. To je splněno pouze v případě, že

a. $b = 8, d = 26$
b. $b = 7, d = 27$

V případě a) řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých, kde *a i c* musí být z oboru přirozených čísel:

$$n = 9a + 8$$
$$n = 28c + 26$$
$$a + c = 105$$

V tomto případě nemá soustava rovnic v oboru přirozených čísel řešení.

V případě b) řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých, kde *a i c* musí být z oboru přirozených čísel:

$$n = 9a + 7$$
$$n = 28c + 27$$
$$a + c = 105$$

Odtud dostáváme, že pro $\boldsymbol{b} = 7$, $\boldsymbol{d = 27}$ *je* $\boldsymbol{c = 25}$, $\boldsymbol{a = 80}$.

Hledané číslo $\boldsymbol{n = 9 \cdot 80 + 7 = 28 \cdot 25 + 27 = 727}$.

Hodnocení:

nalezení b, d 2b.

nalezení a, c 3b.

nalezení n 1b.