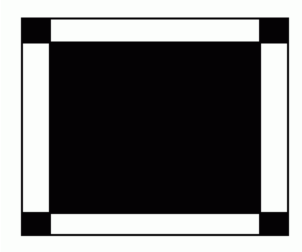
Zadání 3. kola kategorie Z9

Z9-III-1

Na obrázku je nakreslen "skoromagický" kapesník. Je černo-bílý, přičemž černou část tvoří čtverce a bílou část tvoří obdélníky. Kdyby měly bílá a černá část stejný obsah, byl by kapesník "magický". Jaké rozměry by měl "magický" kapesník, jehož

a. **vnitřní čtverec má obsah 324 cm^2?**
b. **rohový čtverec má obsah 16 cm^2?**



Řešení:

a. **Má-li vnitřní čtverec obsah 324 cm^2, je délka jeho strany 18 cm . Označme délku strany rohového čtverce a, potom obsah rohového čtverce je a^2 a obsah obdélníku je $18a$. *Obsah* černé části kapesníku je $324 + 4a^2$ a obsah bílé části kapesníku je $4 . 18a$. Odtud dostáváme rovnici $324 + 4a^2 = 4 . 18a$, jejímž řešením je $a = 9$ cm. Délka strany kapesníku tedy je 18 + 2 . 9 = 36 cm.**
b. **Má-li rohový čtverec obsah 16 cm^2, je délka jeho strany 4 cm. Označme délku strany vnitřního čtverce a, potom obsah vnitřního čtverce je a^2 a obsah obdélníku je $4a$. *Obsah* černé části kapesníku je $4 . 16 + a^2$ a obsah bílé části kapesníku je $4 . 4a$. Odtud dostáváme rovnici $4 . 16 + a^2 = 4 . 4a$, jejímž řešením je $a = 8$ cm. Délka strany kapesníku tedy je 2 . 4 + 8 = 16 cm.**

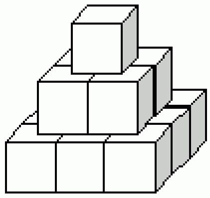
Hodnocení:

vyjádření bílé a černé části po 2b.

délka strany kapesníku po 1b.

Z9-III-2

Pyramida na obrázku je sestavena z kostek očíslovaných přirozenými čísly. Kostky ve spodní vrstvě jsou popsány různými přirozenými čísly. Na každé další kostce je vždy napsán součin čísel kostek, na kterých tato kostka stojí. Zjistěte čísla na kostkách v první a třetí vrstvě, jestliže kostky ve druhé vrstvě jsou očíslovány takto:



165	36
455	56

Řešení:

Na kostce ve třetí vrstvě je součin čísel z druhé vrstvy pyramidy (čísla na obrázku), tedy číslo 151351200. Čísla z druhé vrstvy pyramidy rozložíme na součin prvočísel: 165 = 5 . 3 . 11, 36 = 2 . 2 . 3 . 3, 455 = 5 . 7 . 13 a 56 = 2 . 2 . 2 . 7. Na prostřední kostce první vrstvy je společný dělitel všech čísel z druhé vrstvy, tedy číslo 1 a na ostatních nerohových kostkách první vrstvy je společný dělitel sousedních čísel z druhé vrstvy, tedy čísla 3, 5, 2, 7. Čísla na kostkách v první vrstvě jsou zapsána takto:

11	3	6
5	1	2
13	7	4

Hodnocení:

číslo ve třetí vrstvě 1b.

rozklad čísel na součin prvoč. 1b.

čísla v první vrstvě 4b.

Z9-III-3

Dvě z hran čtyřstěnu mají délky 2 *cm* a 6 *cm*. Zjistěte délky zbývajících hran tohoto čtyřstěnu, jestliže všechny jeho stěny mají stejný obvod a nejmenší možný obvod sítě čtyřstěnu je 28 *cm*.

Řešení:

Délky 2 *cm* a 6 *cm* mohou být délkami dvou mimoběžných, tj. protějších hran čtyřstěnu nebo dvou hran stejné stěny. V prvním případě (obr. 1) musí platit zároveň $a + b = c + d$, $a = 4 + d$, $b = c + 4$.
Tato soustava rovnic nemá řešení.
V druhém případě (obr. 2) musí platit zároveň $b + d = 8$, $a + 2 = c + d$, $a + 6 = b + c$. Odtud dostáváme $4 = b - d$, tedy $b = 6$ *cm*, $d = 2$ *cm* , $a = c$. Součet délek všech hran je 28 *cm* , proto $a = c = 6$ *cm*.

Hodnocení:

vyloučení prvního případu 2b.

určení délek 2 a 6 *cm* 4b.

Z9-III-4

Zjistěte, o kolik maximálně procent (vzhledem k původní hodnotě) se může změnit kořen rovnice *ax* = *b* (*a* různo od 0) s neznámou *x*, jestliže žádný z koeficientů této rovnice nezměníme o víc než 20% původní hodnoty.

Řešení:

Budeme se zabývat pouze takovými případy, kdy oba koeficienty změníme o maximální počet procent (20%). V případě, že oba koeficienty zmenšíme, resp. zvětšíme, o 20%, kořen se nezmění.

Zmenšíme-li *a* o 20% a *b* zvětšíme o 20%, získáme rovnici 0,8*ax* = 1,2*b* . Odtud $x = 1{,}5\frac{b}{a}$**, kořen rovnice se tedy maximálně zvětší o**

50%.

Zvětšíme-li *a* o 20% a *b* zmenšíme o 20%, získáme rovnici 1,2*ax* = 0,8*b* . Odtud $x = \frac{2}{3}\frac{b}{a}$**, kořen rovnice se tedy maximálně zmenší o** $33,\bar{3}$ **%.**

Hodnocení:

maximální zvětšení 3b.

maximální zmenšení 3b.