

**Z9–II–1**

Mirka si myslí dvojciferné číslo. Pokud zamění pořadí cifer, dostane číslo, které se od původního čísla liší o 75 %. Jaké číslo si mohla myslet? (Bednářová)

ŘEŠENÍ. Označme původní číslo  $10a + b$ , tedy nové číslo je  $10b + a$ . (2 body)

Předpokládejme nejdříve, že nové číslo je o 75% větší. Odtud dostáváme následující rovnici:

$$1,75(10a + b) = 10b + a,$$

tedy  $2a = b$ . Nyní již snadno dopočítáme, že vyhovují tato čísla: 12, 24, 36 a 48.

Nyní uvažme, že nové číslo je o 75% menší. Odtud dostáváme následující rovnici:

$$0,25(10a + b) = 10b + a,$$

tedy  $a = \frac{13}{2}b$ . V tomto případě nedostaneme žádné řešení.

Mirka si tedy mohla myslet číslo 12, 24, 36 nebo 48. (4 body)

*Poznámka:* Za 100% se bere původní číslo, kdybychom brali za 100% nové číslo, dostaneme čísla 21, 42, 63, 84.

**Z9–II–2**

Andrea třídí trojúhelníky, jejichž strany vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla, na *úzké*, *široké* a ostatní. *Úzký* trojúhelník je takový, pro který platí, že součet délek některých dvou stran je jen o 1 cm větší než délka třetí strany. *Široký* trojúhelník je takový, v němž je součet délek některých jeho dvou stran dvojnásobkem délky třetí strany. Najděte

- všechny úzké trojúhelníky, jejichž dvě strany měří 6 cm a 8 cm,
- všechny široké trojúhelníky, jejichž dvě strany měří 3 cm a 4 cm,
- všechny trojúhelníky, jejichž jedna strana měří 5 cm a jsou široké a úzké současně.

(Dillingerová)

ŘEŠENÍ. Můžeme předpokládat, že pro strany trojúhelníku platí:

$$a \leq b \leq c.$$

a) Řešení dostaneme přímo z následující tabulky:

$a$	$b$	$c$	závěr
6	8	13	ANO
6		8	NE
3	6	8	ANO

b) Řešení dostaneme přímo z následující tabulky:

$a$	$b$	$c$	závěr
3	4	4	NE
3	4	5	ANO
3	4	6	NE
3	3	4	NE
2	3	4	ANO

c) V tomto případě musíme rozlišit tři možnosti:

I.  $a = 5$

$a$	$b$	$c$	závěr
5	6	10	NE
5	7	11	NE
5	8	12	NE
5	9	13	ANO
5	10	14	NE
5	11	15	NE

Ke stejnému závěru dojdeme i vyřešením soustavy:

$$5 + b = 2c$$

$$5 + c = b + 1.$$

II.  $b = 5$

$a$	$b$	$c$	závěr
5	5	9	NE
4	9	8	NE
3	5	7	ANO
2	5	6	NE

Ke stejnému závěru dojdeme i vyřešením soustavy:

$$a + 5 = 2c$$

$$a + c = b + 1.$$

III.  $c = 5$

$a$	$b$	$c$	závěr
1	5	5	NE
2	4	5	NE
3	3	5	NE

Ke stejnému závěru dojdeme i vyřešením soustavy:

$$a + b = 2c$$

$$a + b = c + 1.$$

(za každou možnou situaci udělte 1–2 body, dohromady 6 bodů)

**Z9–II–3**

Dva cyklisti vyjeli současně ze stejného místa na výlet. Projeli stejnou trasu a společně se vrátili zpět. Cestou oba odpočívali. První jel dvakrát tak dlouho, jako druhý odpočíval. Druhý jel čtyřikrát tak dlouho, jako odpočíval první. Kdo z nich jezdí na kole rychleji a kolikrát? (Černek)

ŘEŠENÍ. Označme

$T_1 \cdots$  doba jízdy 1. cyklisty,

$T_2 \cdots$  doba jízdy 2. cyklisty,

$o_1 \cdots$  doba odpočinku 1. cyklisty,

$o_2 \cdots$  doba odpočinku 2. cyklisty.

Pak platí:

$$o_1 + T_1 = o_2 + T_2$$

$$T_1 = 2o_2$$

$$T_2 = 4o_1$$

(3 body)

Dosadíme za  $T_1, T_2$  do první rovnice a dostaneme

$$o_2 = 3o_1.$$

Označme  $o_1 = t$ . Pak ale ihned dostáváme, že  $o_2 = 3t$ ,  $T_1 = 6t$  a  $T_2 = 4t$ . Vidíme, že 2. cyklista jel 1,5krát rychleji než první a odpočíval třikrát tak dlouho.

**Z9–II–4**

Ve Squarelandu žijí pouze čtverce. Až na dvě výjimky tam každý z nich má dva přátele, z nichž jeden má obvod o 8 cm menší a druhý o 8 cm větší. Průměrná délka strany squarelandského čtverce je 15 cm. Žádné dva čtverce nejsou shodné a obvod nejmenšího čtverce je roven délce strany největšího čtverce. Zjistěte:

- Počet obyvatel ve Squarelandu,
- rozměry největšího a nejmenšího squarelandského čtverce,
- průměrný obsah „Squarelandána“.

(Bednářová)

ŘEŠENÍ. Vzhledem k tomu, že se obvod čtverců liší o 8 cm, musí se jejich strany lišit o 2 cm. Označme tedy strany hledaných čtverců jako  $a, a + 2, a + 4, \dots, a + 2t$ . Ze zadání příkladu je zřejmé, že průměr strany největšího a nejmenšího čtverce je 15 cm. Odtud

$$\frac{a + (a + 2t)}{2} = 15.$$

Dále platí, že

$$4a = a + 2t.$$

Po vyřešení této soustavy dostaneme  $a = 6$ ,  $t = 9$ . Všechny strany čtverců jsou: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 a 24. Nyní už snadno odpovíme na otázky a), b), c).

- a) Ve Squarelandu je 10 obyvatel.  
b) Nejmenší squarelandský čtverec má rozměr  $6 \times 6$  a největší je  $24 \times 24$ .  
c) Průměrná plocha squarelandského čtverce je

$$\frac{6^2 + 8^2 + \dots + 22^2 + 24^2}{10} = 258 \text{ cm}^2.$$

(za každou ze tří částí udělte 2 body)