Komentáře k domácímu kolu kategorie Z5

1. *Doplňte do tabulky přirozená čísla tak, aby v každém jejím bílém políčku byl součin příslušných čísel z jejího šedého záhlaví.*

		b		
a		$a \cdot b$		

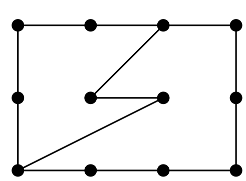
	6	3		
		12		
		9	72	
			56	49

Řešení. Každé z čísel ve šrafovaných políčkách (záhlaví) musí beze zbytku dělit všechna čísla v bílých políčkách, která se nacházejí ve stejném řádku a stejném sloupci jako toto číslo. Číslo 1 dělí beze zbytku 56 i 49 (poslední řádek), v záhlaví příslušného řádku však být nemůže. V opačném případě by totiž v záhlaví třetího sloupce bylo číslo 56, a to nedělí beze zbytku níže umístěné číslo 72. V záhlaví posledního řádku tedy musí být číslo 7. Ostatní chybějící čísla už lehko dopočítáme. Jednotlivé kroky procesu dopočítání čísel nejsou, na rozdíl od dopočítaných čísel, určeny jednoznačně.

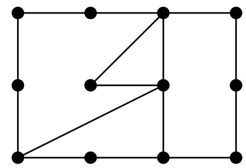
	6	3	24	21
	24	12	96	84
	18	9	72	63
	14	7	56	49

Poznámka: Neměli bychom se spokojit pouze s vyplněnou tabulkou, ale měli bychom požadovat i pořadí, v jakém řešitel jednotlivá čísla doplňoval.

2. *Na obrázku je znázorněn pětiúhelník a šestiúhelník s vrcholy v mřížových bodech čtvercové sítě. Urči obsah šestiúhelníka, víš-li, že pětiúhelník má obsah* $7{,}5\ cm^2$.



Řešení. Pětiúhelník můžeme doplnit na obdélník s obsahem 4 čtverečky (viz obrázek).



Na doplnění použijeme trojúhelník, jehož obsah je polovinou obsahu jednotkového čtverečku, a trojúhelník, jehož obsah je polovinou obsahu „dvojčtverečkového“ obdélníka. Obsah daného pětiúhelníka je tedy $4 - 0{,}5 - 1$, tj. 2,5 čtverečku. Podle zadání to odpovídá $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$, takže jeden čtvereček má obsah $3\ \mathrm{cm}^2$. Zkoumaný šestiúhelník dostaneme, pokud daný pětiúhelník odstřihneme z obdélníku s obsahem 6 čtverečků, tj. $18\,\mathrm{cm}^2$. Šestiúhelník má tedy o obsah $18 - 7{,}5 = 10{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

3. *Nevill opět zapomněl heslo pro vstup do věže. Profesorka McGonagallová mu však prozradila, že:*
- *heslo se skládá ze tří různých písmen,*
- *dobře se vyslovuje, protože v něm nejsou dvě souhlásky vedle sebe,*
- *všechna písmena hesla najdete ve jméně vedoucího učitele Slizolinu – „Snape“.*

Po vyzkoušení třetiny všech hesel, vyhovujících těmto podmínkám, se vstup do věže otevřel. Kolik hesel Nevill vyzkoušel?

Řešení. Z první a druhé podmínky vyplývá, že heslo má tvar $\times\square\times$, $\times\square\square$, $\square\times\square$, $\square\square\times$ nebo $\square\square\square$, kde $\times$ značí souhlásku a $\square$ samohlásku. Poslední z uvedených možností však můžeme vyloučit na základě první a třetí podmínky - ve slově SNAPE jsou totiž jen dvě různé samohlásky. V případě, že má heslo tvar $\times\square\times$, dostaneme následujících 12 možností:

SAN, NAS, SEN, NES, SAP, PAS, SEP, PES, NAP, PAN, NEP, PEN.

V případě, že má tvar $\times\square\square$, dostaneme 6 možností:

SAE, SEA, NAE, NEA, PAE, PEA

V případě, že má tvar $\square\times\square$, dostaneme 6 možností:

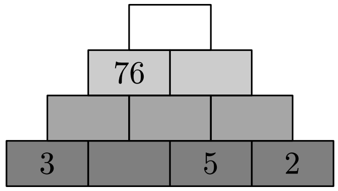
ASE, ESA, ANE, ENA, APE, EPA.

V případě, že má tvar $\square\square\times$, dostaneme 6 možností:

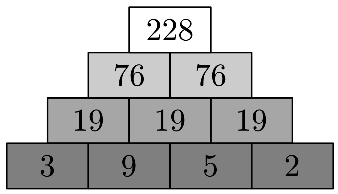
AES, EAS, AEN, EAN, AEP, EAP.

Dohromady je to celkem $12 + 3 \cdot 6 = 30$ možností. Nevil vyzkoušel $30 : 3$, tj. 10 možností.

4. *Doplň do obrázku čísla tak, aby na každé cihličce byl napsán součet všech čísel z tmavších cihliček, než je ona.*



Řešení. Všechny cihličky v jednom řádku mají stejnou barvu, proto jsou v nich (až na první řádek) stejná čísla. Součet všech čísel z prvního řádku se potom dostane na každé z políček ve druhém řádku, a tedy 76 musí být jeho čtyřnásobkem. Odtud pro součet čísel z první řádky dostáváme: $s = 76 : 4 = 19$ a pro chybějící číslo $x = 19 - 3 - - 5 - 2 = 9$. Do druhé řádky doplníme 19, 19, 19 a na vrchol pyramidy $3 \cdot 76 = 228$.



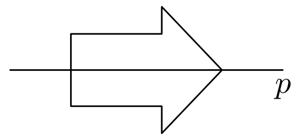
5. *Míša měl včera o 15 samolepek víc než Pavel. Dnes však ale 17 svých vyměnil za 9 Pavlových a dalších 7 vyměnil za 13 Oldových. Pavel kromě těch devíti, které vyměnil za 17 Míšových, vyměnil ještě 11 svých za 6 Láďových. Který z chlapců má teď víc samolepek, Míša nebo Pavel? O kolik?*

Řešení. I. (úvahou) Výměnou s Míšou získal Pavel $17 - 9 = 8$ samolepek, výměnou s Láďou jich $11 - 6 = 5$ ztratil, celkem mu tedy přibyly 3. Kdyby měl Míša stejně samolepek jako včera, měl by jich nyní už jen o $15 - 3 = 12$ víc než Pavel. Míša však má o $8 - 6 = 2$ samolepky méně než včera, protože $13 - 7$ tj. 6 získal výměnou s Oldou a $17 - 9$ tj. 8 ztratil výměnou s Pavlem. Tedy nyní má o $12 - 2 = 10$ samolepek víc než Pavel.

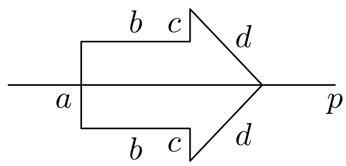
II. (pomocí tabulky)

	včera	dnes
Pavel	x	$x + 17 - 9 + 6 - 11 = x + 3$
Míša	$x + 15$	$x + 15 + 9 - 17 + 13 - 7 = x + 13$
rozdíl (Pavel – Míša)	15	10

6. *O mnohoúhelníku načrtnutém na obrázku víme, že jej přímka p přesně dělí na dvě shodné části. Jeho strany měří 3 cm, 4 cm, 5 cm a 6 cm. Jaký obvod může mít tento mnohoúhelník?*



Řešení. Označme si délky jednotlivých stran mnohoúhelníka (stejně dlouhé strany značíme stejnými písmeny) jako a, b, c, d (viz obrázek)



Pro obvod O mnohoúhelníka potom platí

$$O = 2 \cdot (a + b + c + d) - a = 2 \cdot (3 + 4 + 5 + 6) - a = 36 - a.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti (viz trojúhelník se stranami $a + 2c$, d, d) však vyplývá, že a nemůže být 6, tedy $a = 3$ ($b = 4$, $c = 5$, $d = 6$ nebo $b = 5$, $c = 4$, $d = 6$), resp. $a = 4$ ($b = 5$, $c = 3$, $d = 6$). Příslušné obvody jsou potom $36 - 3$, $36 - 4$ a $36 - 5$, tj. 33, 32 a 31 cm.