55. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z6

1. *Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:*

$$\square \xrightarrow{:\,2} \square \xrightarrow{+\,4} \square \xrightarrow{-\,3} \square \xrightarrow{:\,7} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times\,4} \square \xrightarrow{-\,2} \square \xrightarrow{:\,2} \square \xrightarrow{+\,2} \square$$

$$\square \xrightarrow{+\,6} \square \xrightarrow{-\,2} \square \xrightarrow{-\,1} \square \xrightarrow{:\,4} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times\,5} \square \xrightarrow{-\,1} \square \xrightarrow{:\,7} \square \xrightarrow{\times\,4} \square$$

Řešení. Začneme posledním řádkem. Ve třetím čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi, tj. 7 nebo 14. Když zkusíme 7, dostaneme:

$$\square \xrightarrow{\times\,5} \boxed{8} \xrightarrow{-\,1} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{4}$$

Do prvního čtverečku nemáme co doplnit. Vyhovuje tedy číslo 14 a poslední řádek bude:

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{15} \xrightarrow{-\,1} \boxed{14} \xrightarrow{:\,7} \boxed{2} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{8}$$

Nyní si všimneme prvního řádku. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi (7 nebo 14), ale 14 je již v posledním řádku, takže doplníme číslo 7. Odtud doplníme celý řádek:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:\,2} \boxed{6} \xrightarrow{+\,4} \boxed{10} \xrightarrow{-\,3} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1}$$

Pokračujeme druhým řádkem. V prvním čtverečku nemůže být číslo větší než 5, čísla 1, 2, 3 jsou již použita, takže tam může být 4 nebo 5. Nevyhovuje však 4 (ve třetím čtverečku by se opakovalo číslo 14), takže doplníme číslo 5. Celý řádek bude vypadat takto:

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{20} \xrightarrow{-\,2} \boxed{18} \xrightarrow{:\,2} \boxed{9} \xrightarrow{+\,2} \boxed{11}$$

Zbývá nám třetí řádek. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné čtyřmi, které není dosud použité, tj. 4 nebo 16. Z nich vyhovuje jen 16 (číslo 4 by vedlo ke sporu v pátém čtverečku, protože číslo 1 je už použité). Použitím čísla 16 doplníme celý řádek:

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

Celkové řešení:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:\,2} \boxed{6} \xrightarrow{+\,4} \boxed{10} \xrightarrow{-\,3} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1}$$

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{20} \xrightarrow{-\,2} \boxed{18} \xrightarrow{:\,2} \boxed{9} \xrightarrow{+\,2} \boxed{11}$$

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{15} \xrightarrow{-\,1} \boxed{14} \xrightarrow{:\,7} \boxed{2} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{8}$$

2. *Sněhurka se sedmi trpaslíky sbírala lískové oříšky. Měla jich tolik, kolik všichni trpaslíci dohromady. Když se vraceli, potkali veverku Loudilku. Sněhurka i každý trpaslík jí dali stejný počet oříšků. Když pak trpaslíci a Sněhurka vysypali zbylé oříšky na stůl, zapsal Prófa jejich počty: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1 672. Kolik oříšků dostala veverka Loudilka?*

Řešení. Veverka dostala od každého x oříšků, takže

$$\begin{aligned} 120 + 316 + 202 + 185 + 333 + 297 + 111 + 7x &= 1\,672 + x, \\ 1564 + 7x &= 1\,672 + x, \\ 6x &= 108, \\ x &= 18. \end{aligned}$$

Veverka dostala od každého trpaslíka i od Sněhurky 18 oříšků, celkem dostala 144 oříšky.

3. *Když jsme čísla 80 a 139 vydělili stejným přirozeným číslem, získali jsme zbytky 8 a 13. Jakým číslem jsme dělili?*

Řešení. Hledané číslo musí být větší než zbytek 13. Kdybychom hledaným číslem dělili čísla $(80 - 8)$ a $(139 - 13)$, vyšlo by dělení beze zbytku. Jde tedy o čísla 72 a 126. Obě čísla mají společné dělitele 1, 2, 3, 6, 9, 18, z nichž je větší než 13 pouze číslo 18:

$$\begin{aligned} 80 : 18 &= 4 \text{ (zb. 8)}. \\ 139 : 18 &= 7 \text{ (zb. 13)}. \end{aligned}$$

(Snadno se ukáže, že společný dělitel čísel $(80-13)$ a $(139-8)$ nevyhovuje zadání úlohy.)

4. *Obvod trojúhelníku je 16 cm. Jak dlouhé může mít strany, když jsou to v centimetrech přirozená čísla a součet délek dvou stran je o 6 cm větší než délka třetí strany?*

Řešení. Trojúhelník má strany v centimetrech dány přirozenými čísly a, b, c. Označení a, b můžeme zvolit tak, aby platilo $a \leqq b$. Platí:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 16, \\ a+b &= c+6. \end{aligned}$$

Dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$\begin{aligned} (c+6)+c &= 16, \\ 2c+6 &= 16, \\ 2c &= 10, \\ c &= 5. \end{aligned}$$

Je $c = 5$, pak $a + b = 11$. Jsou tyto možnosti:

a	b	c	trojúhelníková nerovnost
1	10	5	neplatí
2	9	5	neplatí
3	8	5	neplatí
4	7	5	platí
5	6	5	platí

Úloha má 2 řešení: Strany trojúhelníku měří 4 cm, 5 cm, 7 cm nebo 5 cm, 5 cm, 6 cm.

5. *Maruška dostala pět různě těžkých koláčů. Průměrná hmotnost jednoho koláče byla 200 gramů. Maruška jeden koláč snědla a průměrná hmotnost zbylých koláčů pak byla 160 gramů. Jakou hmotnost měl koláč, který Maruška snědla?*

Řešení. Označíme hmotnosti koláčů a, b, c, d, e gramů. Průměrná hmotnost je

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 200,$$

tj.

$$a+b+c+d+e = 1\,000.$$

Předpokládejme, že Maruška snědla koláč hmotnosti e gramů. Pro zbývající koláče platí

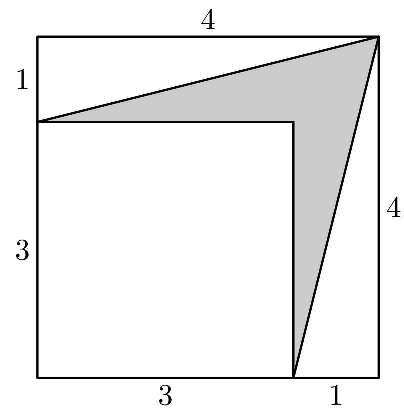
$$\frac{a+b+c+d}{4} = 160,$$

tj.

$$a+b+c+d = 640.$$

Protože $1\,000 - 640 = 360$, měl snědený koláč hmotnost 360 g.

6. *Urči obsah šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obrázku jsou v centimetrech).*



Řešení. Počítejme bez jednotek cm a cm^2. Označme S_1 obsah velkého čtverce (obr.):

$$S_1 = 4^2 = 16,$$

S_2 obsah malého čtverce:

$$S_2 = 3^2 = 9,$$

S_3 obsah pravoúhlého trojúhelníku:

$$S_3 = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

(v obrázku jsou dva takové shodné trojúhelníky), S obsah šedé plochy:

$$S = S_1 - S_2 - 2S_3 = 16 - 9 - 2 \cdot 2 = 16 - 9 - 4 = 3.$$

Šedá plocha má obsah $3\,\mathrm{cm}^2$.