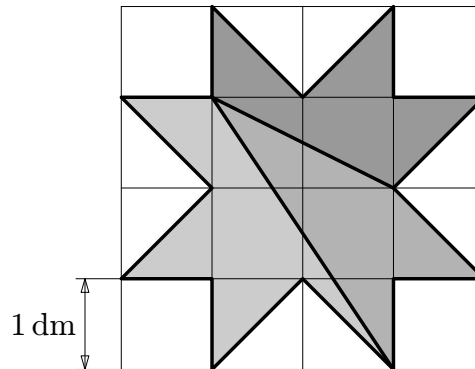


Komentáře k domácímu kolu kategorie Z6

1. Lukáš natíral latkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 lačky?

ŘEŠENÍ. Nejprve zjistíme, kolik latěk Ondra natřel. Protože Lukáš skončil o 15 minut dřív, natíral by tyto lačky právě 15 minut. Protože za 10 minut natře 8 latěk, za 5 minut natře 4 lačky. Tedy za 15 minut natře celkem 12 latěk. To jsou lačky, které natřel Ondra. Nyní určíme, jak dlouho mu to trvalo. Protože 4 lačky natře za 7 minut, 12 latěk (trojnásobek) natře za $3 \cdot 7 = 21$ minut.

2. Hvězda na obrázku je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich.



ŘEŠENÍ. Při určování obsahů těchto tří částí vyjdeme z toho, že pravouhlý trojúhelník má poloviční obsah příslušného obdélníku.

Obsah nejtmaší části:

$$S_1 = (2 \cdot 1) : 2 + 3 \cdot (1 \cdot 1) : 2 = 2,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Obsah středně tmavé části:

$$S_2 = [(3 \cdot 2) : 2 - (2 \cdot 1) : 2] + (1 \cdot 1) : 2 = 2,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Obsah světlé části:

$$S_3 = [(3 \cdot 2) : 2 - 2 \cdot (1 \cdot 1) : 2] + 2 \cdot (1 \cdot 1) : 2 = 3 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

3. Vícemístné číslo se nazývá optimistické, jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo pesimistické. Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla složených z týchž číslic je 11 001 000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel?

ŘEŠENÍ. Napišeme si, jak vypadá součet takových dvou čísel:

$$\begin{array}{rcccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ & g & f & e & d & c & b & a \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebujeme, aby součet $g + a$ (jednotky) byl roven 10. Víme přitom, že rozdíl g a a je alespoň 6, protože a je první a g je poslední číslice sedmimístného optimistického čísla. V úvahu připadají pouze dvě možnosti: $9 + 1$ a $8 + 2$.

V prvním případě postupně doplníme naznačené sčítání na tvar:

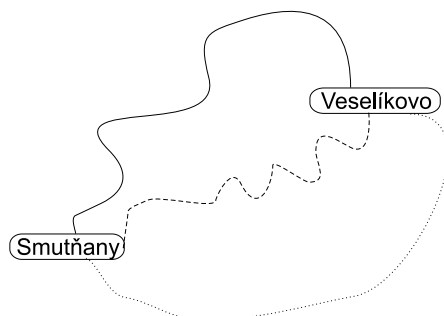
$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jiná možnost v tomto případě není.

Prověříme druhý případ. Existuje jediné sedmimístné optimistické číslo začínající číslicí 2 a končící číslicí 8, a sice 2 345 678. Snadno se přesvědčíme, že po přičtení čísla 8 765 432 nedostaneme zadaný součet.

4. Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.

1. Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?
2. Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?
3. O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?
4. O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička?



ŘEŠENÍ. U každé cesty nejprve zjistíme dobu jízdy a cenu:

- ▷ Cesta zakreslená plnou čarou:
doba jízdy: 80 km za 60 min., tzn. 40 km za 30 min.,
cena: $40 \cdot 15 + 50 = 650$ Kč.
- ▷ Cesta zakreslená čárkovanou čarou:
doba jízdy: 60 km za 60 min., tzn. 35 km za 35 min.,
cena: $35 \cdot 15 + 150 = 675$ Kč.
- ▷ Cesta zakreslená tečkovanou čarou:
doba jízdy: 100 km za 60 min., tzn. 45 km za 27 min.,
cena: $45 \cdot 15 + 100 = 775$ Kč.

Nyní můžeme odpovědět na otázky v zadání:

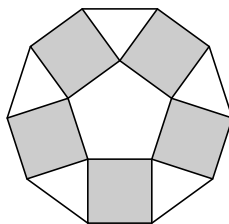
1. Nejrychlejší je cesta vyznačená tečkovaně, tu by si měl vybrat taxikář strýčka Uspěchaného.
 2. Nejlevnější je cesta vyznačená plnou čarou, tu by si měl vybrat taxikář tetičky Spořivé.
 3. Strýčkova cesta je rychlejší o $30 - 27 = 3$ minuty.
 4. Strýček zaplatí víc o $775 - 650 = 125$ Kč.
5. *Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet?*

ŘEŠENÍ. Seřadíme si tipy podle velikosti: 15, 16, 28, 32, 37 (v km).

Nejprve zjistíme, jestli byl výlet kratší než nejmenší tip (resp. delší než největší tip). To by znamenalo, že by některá chyba byla větší než $37 - 15 = 22$ km. Protože není, je skutečná délka výletu v rozmezí 15 km a 37 km. Potom ale součet některých dvou chyb musí dát 22 km (chyby vztahující se k extrémním tipům). Vyhovuje jediná dvojice 8 km a 14 km. Jsou dvě možnosti:

- ▷ Tip 15 km se od skutečnosti liší o 14 km.
Potom byl výlet dlouhý $15 + 14 = 29$ km a příslušné chyby by měly hodnoty postupně 14 km, 13 km, 1 km, 3 km a 8 km. To nevyhovuje.
- ▷ Tip 15 km se od skutečnosti liší o 8 km.
Potom byl výlet dlouhý $15 + 8 = 23$ km a příslušné chyby by měly hodnoty postupně 8 km, 7 km, 5 km, 9 km a 14 km. To už vyhovuje zadání.
Výlet byl dlouhý 23 km.

6. Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků.



ŘEŠENÍ. Protože jsou použité čtverce shodné, je pětiúhelník jimi ohraničený pravidelný. Jeho vnitřní úhel α má velikost:

$$\alpha = 2 \cdot \left[\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{5} \right) : 2 \right],$$
$$\alpha = 108^\circ.$$

Rovnoramenný trojúhelník:

Nejprve zjistíme velikost vnitřního úhlu proti základně:

$$360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Snadno dopočteme velikosti úhlů při základně:

$$(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ.$$

Vnitřní úhly rovnoramenných trojúhelníků mají velikosti 72° , 54° a 54° .