56. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

V součinové pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součin výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním. Doplňte do prázdných polí v součinové pyramidě na obrázku chybějící výrazy. Snažte se psát výrazy v co nejjednodušším tvaru a uveďte, v jakém pořadí jste je doplňovali ($x \neq 0$). (*S. Bednářová*)

$9x^4-36x^2$			
	$3x$		
	$\frac{1}{x^2}$		$\frac{x+2}{3x^3}$

Řešení. Nejprve doplníme 3. výraz ve spodní řadě. Bude jím $3x : \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{3x^3.}}$

Poslední výraz v 2. řadě zdola je $3x^3 \cdot \dfrac{x+2}{3x^3} = \underline{\underline{x+2.}}$

Poslední výraz v 3. řadě zdola je $\underline{\underline{3x \cdot (x+2)}} = \underline{\underline{3x^2+6x.}}$ (Do pyramidy lze doplňovat libovolný z podtržených výrazů.)

První výraz v 3. řadě zdola je $\dfrac{9x^4-36x^2}{3x^2+6x} = \dfrac{(3x^2+6x)(3x^2-6x)}{3x^2+6x} = \underline{\underline{3x^2-6x}} =$ $= \underline{\underline{3x \cdot (x-2)}}.$

První výraz v 2. řadě zdola je $\dfrac{3x^2-6x}{3x} = \dfrac{3x(x-2)}{3x} = \underline{\underline{x-2}}.$

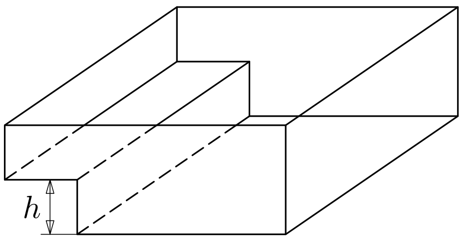
První výraz v 1. řadě zdola je $(x-2) : \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{(x-2) \cdot x^2}} = \underline{\underline{x^3-2x^2}}.$

$9x^4-36x^2$			
$3x^2-6x$	$3x^2+6x$		
$x-2$	$3x$	$x+2$	
x^3-2x^2	$\frac{1}{x^2}$	$3x^3$	$\frac{x+2}{3x^3}$

(Za správné doplnění každého čísla je 1 bod.)

Z9–II–2

Na obrázku vidíte bazén s dlouhým schodem při jedné jeho stěně. Prázdný bazén jsme začali napouštět přívodem s neměnným průtokem a sledovali jsme výšku hladiny. Za



8 min hladina vystoupila do výšky 20 cm a zatím ještě nebyla na úrovni schodu. Po 23 min napouštění se hladina nacházela ve výšce 55 cm a schod již byl nějakou dobu pod hladinou. Po 35,5 min napouštění byl bazén naplněn do výšky 80 cm. V jaké výšce h ode dna bazénu se nachází schod? (*L. Šimůnek*)

Řešení. Rychlost stoupání v době 0–8 min: $20 : 8 = 2{,}5$ (cm/min).

Rychlost stoupání v době 23–35,5 min: $(80-55) : (35{,}5-23) = 25 : 12{,}5 = 2$ (cm/min).

Čas, za který hladina vystoupila do výšky h, označíme t a vypočteme ho pomocí rovnice:

$$t \cdot 2{,}5 + (23 - t) \cdot 2 = 55,$$

odtud $t = 18$. Trvalo tedy 18 minut, než hladina vystoupila do výšky h. Po celou tuto dobu stoupala rychlostí 2,5 cm/min. Proto

$$h = 18 \cdot 2{,}5 = 45 \text{ (cm)}.$$

(rychlost stoupání do výšky h ... 1 b.,
rychlost stoupání nad výškou h ... 1 b.,
sestavení rovnice + její vyřešení ... 1 + 1 b.,
správná výška h ... 2 b.)

Z9–II–3

Nováková, Vaňková a Sudková vyhrály štafetu a kromě diplomů dostaly i bonboniéru, kterou hned po závodech sluply. Kdyby snědla Petra o 3 bonbóny více, snědla by jich právě tolik, co Míša s Janou dohromady. A kdyby si Jana pochutnala ještě na sedmi bonbónech, také by jich měla tolik, co druhé dvě dohromady. Ještě víme, že počet bonbónů, které snědla Vaňková, je dělitelný třemi a že Sudková si smlsla na sedmi bonbónech. Jak se děvčata jmenovala? Kolik bonbónů snědla každá z nich? (*M. Volfová*)

Řešení. První způsob: Označme počet bonbonů, které snědla Petra p, Jana j, Míša m. Platí:

$$p + 3 = m + j,$$
$$j + 7 = p + m.$$

Odečteme druhou rovnici od první. Získáme $p - j - 4 = j - p$, tedy:

$$2p - 4 = 2j, \quad p = j + 2.$$

Sestavíme tabulku:

j	1	2	...	5	6	7
p	3	4	...	7	8	9
m	5	5	...	5	5	5

Číslo 7 se objeví jen ve dvou sloupcích; jedno číslo má být dělitelné třemi — vyhovuje poslední sloupec. Jana Sudková měla 7 bonbonů; Petra Vaňková 9 a Míša Nováková 5 bonbonů.

(nalezení vztahu $p = j + 2$ ... 2 b.,
sestavení tabulky ... 2 b.,
zvolení správného sloupce ... 1 b.,
správné přiřazení jmen ... 1 b.)

Druhý způsob: Stejným způsobem dojdeme ke vztahu $p = j + 2$. Tento výraz dosadíme za p do první rovnice. Úpravami získáme m.

Podle zadání je jedna z neznámých 7.

Pokud $p = 7$, tak $j = p - 2 = 5$. V tomto případě by žádná neznámá nebyla dělitelná třemi.

Pokud $j = 7$, tak $p = j + 2 = 9$. Tato možnost vyhovuje zadání.

Jana Sudková měla 7 bonbonů; Petra Vaňková 9 a Míša Nováková 5 bonbonů.

(nalezení vztahu $p = j + 2$ ... 2 b.,
$m = 5$, $j = 7$, $p = 9$ ... 3 b.,
správné přiřazení jmen ... 1 b.)

Z9–II–4

Je dán obdélník $KLMN$, kde $|KL| = 6\,\text{cm}$ a $|ML| = 4\,\text{cm}$. Vypočtěte obvody všech rovnoramenných trojúhelníků KLX, jestliže bod X leží na straně MN.

(*M. Dillingerová*)

Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku KLX může být KL a) ramenem nebo b) základnou.

a) Půjde o trojúhelník KLX_1, kde $|KL| = |KX_1| = 6$. Označme $|NX_1| = x$. Podle Pythagorovy věty platí $4^2 + x^2 = 6^2$, odtud $x^2 = 20$, $x = 2\sqrt{5}$. Pak $|X_1M| = 6 - 2\sqrt{5} \doteq 1{,}53$. V trojúhelníku LMX_1 podle Pythagorovy věty platí $\left(6 - 2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2 = |LX_1|^2$, odtud $|LX_1| \doteq 4{,}3$ a obvod $o \doteq 6 + 6 + 4{,}3 = 16{,}3$. Totéž bude platit pro trojúhelník KLX_2, kde $|KL| = |X_2L| = 6$; $|KX_2| = |LX_1| \doteq 4{,}3$; $o \doteq 16{,}3$.

b) Je-li KL základnou rovnoramenného trojúhelníku, leží bod X_3 uprostřed strany MN. Pro délku ramene r platí $r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $r = 5$, $o = 6 + 5 + 5 = 16$.

(3 body za určení obvodu trojúhelníku KLX_1; 1 bod za (stejně velký) obvod trojúhelníku KLX_2; 2 body za určení obvodu trojúhelníku KLX_3.)