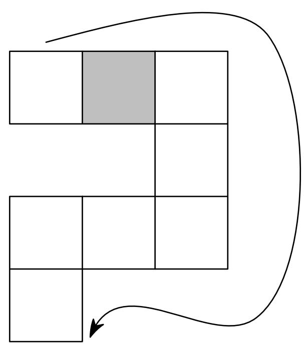
I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena číslem 19, takže na vedlejší políčko se může otisknout jedno z čísel 17, 7, 13 nebo 11. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění zmiňovaných čtyř čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a číslo na stěně, kterou se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

19	a	5

Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo b musí být různé od a, 5, 19, $24 - a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:

19	a	5
		b
5	a	19
$24-b$		

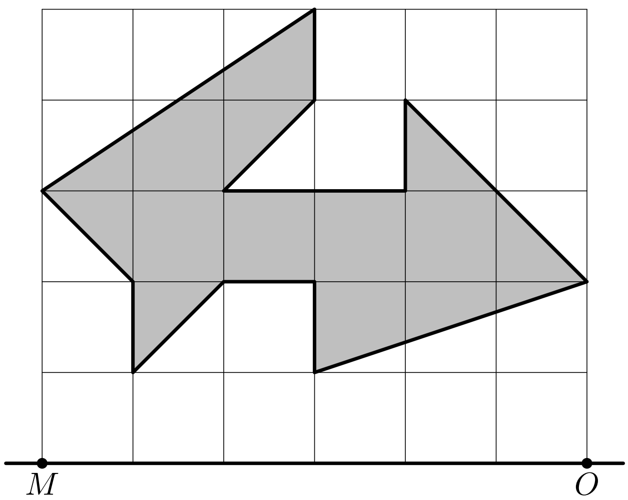
Můžeme si všimnout, že dvojice 19, 5 se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice b, $24-b$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

$$19 + a + 5 + b + 19 + a + 5 + (24 - b) = 3 \cdot 24 + 2a = 72 + 2a.$$

Součet tedy závisí jenom na čísle, jímž se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Toto číslo by mělo být největší možné. Protože číslo 19 je již použito, musí jít o číslo 17.

Z7–I–2

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Možné řešení. Obsah šedé plochy v horních dvou řádcích je

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3\,(\text{cm}^2),$$

v prostředním řádku

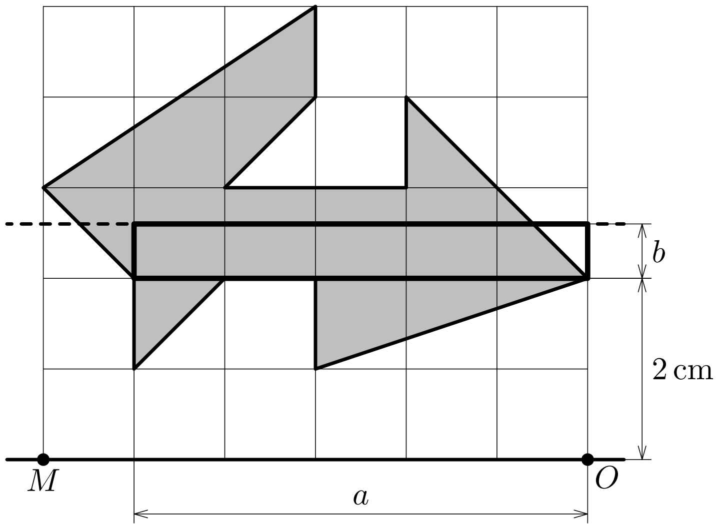
$$4 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5\,(\text{cm}^2)$$

a ve druhém řádku odspoda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3 \cdot 1) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah celého šedého obrazce tedy je $3 + 5 + 2 = 10\,(\mathrm{cm}^2)$.

Zmíněná rovnoběžka má celý obrazec rozdělit na dvě části o obsahu $10 : 2 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$. Šedou plochu v prostředním řádku přitom rozdělí na dva kosodélníky, horní z nich bude mít obsah $2\,\mathrm{cm}^2$, dolní $3\,\mathrm{cm}^2$. Posunutím jedné trojúhelníkové části dolního kosodélníku získáme obdélník o stejném obsahu, jako měl kosodélník, viz obrázek.



Známe obsah S tohoto obdélníku i jeho delší stranu a. Délka jeho kratší strany je $b = S : a = 3 : 5 = 0{,}6\,(\mathrm{cm})$. Libor povede rovnoběžku ve vzdálenosti $2 + 0{,}6 = 2{,}6\,(\mathrm{cm})$ od přímky MO.

Z7–I–3

Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den?

Možné řešení. První den turisté ušli $\frac{1}{3}$ cesty, do cíle jim tak zbyly $\frac{2}{3}$ celkové délky trasy.

Druhý den ušli $\frac{1}{3}$ ze včerejšího zbytku, tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ z celé cesty; do cíle zbyly $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ celé cesty.

Podobně, třetí den ušli $\frac{1}{4}$ ze $\frac{4}{9}$, tj. $\frac{1}{9}$ z celé trasy. Do cíle jim pak chybělo $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ z celkové délky plánované trasy, což bylo podle zadání 24 km. Celá túra byla tedy dlouhá $3 \cdot 24 = 72\,(\mathrm{km})$.

Odtud jednoduše dopočítáme, kolik kilometrů turisté ušli v jednotlivých dnech:

- první den to bylo $\frac{1}{3} \cdot 72 = 24\,(\mathrm{km})$,
- druhý den $\frac{2}{9} \cdot 72 = 16\,(\mathrm{km})$,
- třetí den $\frac{1}{9} \cdot 72 = 8\,(\mathrm{km})$.

Z7–I–4

Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí.

Možné řešení. Za 5 let mělo rodině o čtyřech členech přibýt $4 \cdot 5 = 20$ let, ale přibylo jen $81 - 62 = 19$ let. To mohlo nastat jedině v případě, že mladší syn nebyl ještě před 5 lety na světě a do rodinného součtu let přispěl jen 4 lety ($3 \cdot 5 + 4 = 19$). Mladšímu synovi jsou tedy 4 roky. Jeho staršímu bratrovi je o 4 roky více, tj. 8 let.

Rodičům dohromady je $81 - 4 - 8 = 69$. Je-li matce m let, je otci $m + 3$ let a platí: $m + m + 3 = 69$, tedy $m = 33$.

Matce je 33 let, otci 36 let, staršímu synovi 8 let a mladšímu 4 roky.

Z7–I–5

Zuzka napsala pětimístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo.

Které pětimístné číslo Zuzka napsala?

Možné řešení. Pětimístné číslo napsané jako $\overline{ab\,cde}$ představuje hodnotu $10\,000a + {} + 1\,000b + 100c + 10d + e$, kterou označíme x. Když napíšeme jedničku před toto pětimístné číslo, tj. $\overline{1ab\,cde}$, máme číslo o $100\,000$ větší, tj. číslo $x + 100\,000$. Když napíšeme jedničku za neznámé číslo, tj. $\overline{abc\,de1}$, dostáváme číslo $10x + 1$. Podle zadání platí $10x + 1 = 3 \cdot {} \cdot (x + 100\,000)$, odkud $7x = 299\,999$. Číslo napravo je skutečně dělitelné 7 a Zuzka tudíž napsala $x = 299\,999 : 7 = 42\,857$.

Jiné řešení. Alternativně lze úlohu řešit násobením „odzadu“ podle následujícího návodu:

$$\begin{array}{r} 1abcde \\ \cdot 3 \\ \hline abcde1 \end{array}$$

Počítáme $3 \cdot e = (2)1$, tj. $e = 7$.

$$\begin{array}{r} 1abcd7 \\ \cdot 3 \\ \hline abcd71 \end{array}$$

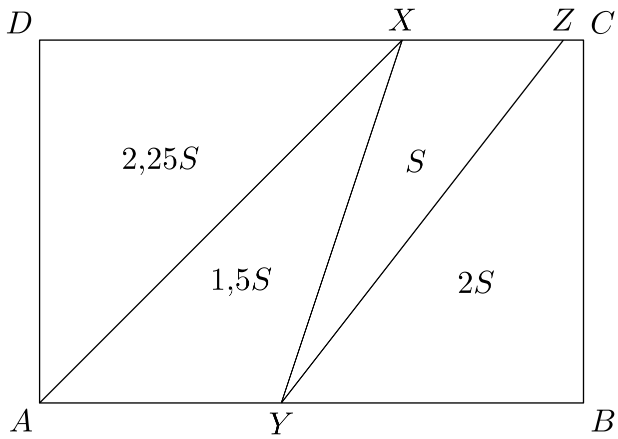
Počítáme $3 \cdot 7 = 21$, 2 si pamatujeme dále, $3 \cdot d + 2 = (1)7$, tj. $d = 5$. Podobným způsobem určíme postupně všechny číslice hledaného čísla.

Z7–I–6

Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímku, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímku, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímku, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$.

Možné řešení. Ze zadání platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$. Pokud obsah trojúhelníku XYZ označíme S, je obsah čtyřúhelníku $YBCZ$ roven $2S$, viz obrázek.



Dále je zadáno $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$ a z předchozího plyne, že obsah čtyřúhelníku $YBCX$ je $2S + S = 3S$. Obsah trojúhelníku AXY tedy musí být $3S : 2 = 1{,}5S$. Ze zadání také známe $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Obsah čtyřúhelníku $ABCX$ je $2S + S + 1{,}5S = 4{,}5S$. Obsah trojúhelníku AXD je tedy $4{,}5S : 2 = 2{,}25S$. Hledaný poměr $S_{AXD} : S_{AXZY}$ je $2{,}25S : (1{,}5S + S)$, tj. $2{,}25 : 2{,}5$. Po rozšíření čtyřmi dostaneme poměr $9 : 10$.

Poznámka. Úlohu lze řešit také tak, že se v závislosti na délce úsečky $|AB|$ určí délky $|DX|$, $|AY|$ a $|XZ|$, vyjádří se obsahy požadovaných útvarů a poté jejich poměr: Označíme-li a délku úsečky $|AB|$, pak se z požadavku $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$ snadno odvodí, že $|DX| = \frac{2}{3}a$. Podobně ze zbylých dvou rovností vyplývá $|AY| = \frac{4}{9}a$ a $|XZ| = \frac{8}{27}a$. Poměr $S_{AXD} : S_{AXZY}$ je potom roven $\frac{|DX|\cdot|BC|}{2} : \frac{(|AY|+|XZ|)\cdot|BC|}{2} = \frac{|DX|}{|AY|+|XZ|}$. Po dosazení a úpravě vychází $9 : 10$.