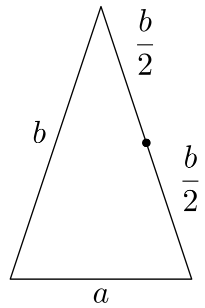
58. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

U lesa, který měl tvar rovnoramenného trojúhelníku, se u jednoho z jeho vrcholů utábořili Ivo s Petrem. Uprostřed protilehlé strany byla studánka. Chlapci se rozhodli, že k ní nepůjdou lesem, ale po jeho obvodu. Každý vyšel jiným směrem, ale oba rychlostí 4 km/h. Ivo dorazil ke studánce za 15 minut, Petr za 12. Jak dlouhé byly strany „lesního" trojúhelníku? (Délky stran zaokrouhlete na celé metry.) (*M. Volfová*)

Možné řešení. Chlapci nemohli tábořit u vrcholu proti základně rovnoramenného trojúhelníku, to by šli ke studánce stejnou dobu. Na obrázku jsou vyznačeny umístění stanu a studánky, délky ramen b a základny a.



Ze zadání víme, že Ivo šel $\frac{1}{4}$ hodiny rychlostí 4 km/h, ušel tedy 1 km. Petr šel 12 minut, tj. $\frac{1}{5}$ hodiny, rychlostí 4 km/h, ušel tedy $\frac{4}{5} = 0{,}8$ (km). Nyní musíme diskutovat následující dvě možnosti:

1. Ivo vyšel po ramenu, Petr po základně trojúhelníku.

V tomto případě ušel Ivo $b + \frac{b}{2} = 1$ (km) a Petr $a + \frac{1}{2}b = \frac{4}{5}$ (km). Odtud dopočítáme $\frac{3}{2}b = 1$ (km) a $b = \frac{2}{3}$ (km), zaokrouhleně $b \doteq 667$ m. Po dosazení do druhé rovnosti dostáváme $a + \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$ (km), tj. $a = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$ (km), zaokrouhleně $a \doteq 467$ m. Strany trojúhelníku jsou přibližně 667, 667 a 467 (m).

2. Petr vyšel po ramenu, Ivo po základně trojúhelníku.

V tomto případě ušel Petr $b + \frac{1}{2}b = \frac{4}{5}$ (km) a Ivo $a + \frac{1}{2}b = 1$ (km). Dopočítáme $\frac{3}{2}b = \frac{4}{5}$ (km) a $b = \frac{8}{15}$ (km), zaokrouhleně $b \doteq 533$ m. Po dosazení do druhé rovnosti dostáváme $a + \frac{4}{15} = 1$ (km), tj. $a = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$ (km), zaokrouhleně $a \doteq 733$ m. Strany trojúhelníku jsou přibližně 533, 533 a 733 (m).

Hodnocení. 2 body za rozbor situace a výpočet vzdáleností, které oba chlapci ušli; po 2 bodech za výpočet rozměrů lesa v každé z obou situací.

Z8–II–2

Eva psala po sobě jdoucí přirozená čísla: 1234567891011... Jakou číslici napsala na 2 009. místě? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Jednomístných čísel je 9 (1 až 9) a k jejich napsání je třeba 9 číslic. Dvojmístných čísel je 90 (10 až 99) a k jejich napsání je třeba 180 číslic. Trojmístných čísel je 900 (100 až 999) a k jejich napsání je třeba celkem 2 700 číslic. K napsání všech jednomístných a dvojmístných čísel je potřeba 189 číslic; 2 009. číslice byla užita u nějakého trojmístného čísla.

Počet číslic, které byly použity k vytvoření trojmístných čísel, je $2\,009 - 189 = 1\,820$. Protože $1\,820 : 3 = 606$ (zbytek 2), je 2 009-tá číslice v řadě druhou číslicí 607. trojmístného čísla. První trojmístné číslo je 100, druhé trojmístné číslo je $101 = 100 + 1$, třetí trojmístné číslo je $102 = 100 + 2\ldots$ Podobně 607. trojmístné číslo je $100 + 606 = 706$ a jeho druhá číslice je 0. Eva tedy na 2 009. místě napsala 0.

Hodnocení. 1 bod za určení počtu číslic potřebných k zapsání jednomístných a dvojmístných čísel (tj. 189); 3 body za zjištění, že hledaná číslice je v 607. trojmístném čísle; 2 body za nalezení číslice 0 v čísle 706.

Z8–II–3

Tři daná přirozená čísla jsou seřazena podle velikosti. Určete je na základě následujících informací:

- aritmetický průměr daných tří čísel je roven prostřednímu z nich,
- rozdíl některých dvou daných čísel je 321,
- součet některých dvou daných čísel je 777.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Prostřední hledané přirozené číslo označme x. Aby byl průměr všech tří čísel roven x, musí být třetí číslo o tolik větší než x, o kolik je první číslo menší než x. Hledaná čísla proto můžeme označit

$$x - a, \quad x, \quad x + a,$$

kde a je nějaké přirozené číslo. Dle zadání je rozdíl některých dvou hledaných čísel 321. Rozdíl dvou po sobě jdoucích čísel je a, rozdíl prvního a třetího čísla je $2a$. Číslo 321 je liché, rozdíl $2a$ sudý, proto $2a$ nemůže být 321, a tedy nutně $a = 321$. Hledaná čísla jsou

$$x - 321,\ x,\ x + 321.$$

Dle zadání je součet některých dvou hledaných čísel 777. Součet prvního a druhého je $2x - 321$, součet druhého a třetího je $2x + 321$, součet prvního a třetího je $2x$. Součet $2x$ je sudý, proto $2x$ není 777. I možnost $2x + 321 = 777$ zavrhneme, protože pak by bylo $x = 228$, a tedy první hledané číslo by bylo záporné. Proto může platit jedině $2x - 321 = 777$, odkud $x = 549$. Hledaná čísla jsou

$$228,\ 549,\ 870.$$

Hodnocení. 1 bod za úvahu o průměru; 1 bod za úvahu o rozdílu 321; 2 body za úvahu o součtu 777; 2 body za správný závěr.